جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم – قسم الرياضيات	الاختبارالشهري الثاني للمقرر 111 ريض للفصل الثاني 1439-1438 هـ
	الإسم: .... الرقم الجامعي:.................................... أستاذ المقرر:....................................	الزمن: ساعة ونصف. الدرجة:

ملاحظات : 1. عدد الورقات 4 2. ممنوع استخدام الالة الحاسبة

السؤال الأول (4 درجات): احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y=\sinh(x^2)+\operatorname{sech} x$. (درجتان)

$$\frac{dy}{dx} = 2x\cosh(x^2) - \tanh x \operatorname{sech} x$$

1 1

(2) $y=x\ln\left(\cosh^{-1}x\right)$. (درجتان)

$$\frac{dy}{dx} = \ln(\cosh^{-1}x) + x\,\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{\cosh^{-1}x} \quad ; \ x>1$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln(\cosh^{-1}x) + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}\,\cosh^{-1}x} \quad ; \ x>1$$

1 1

السؤال الثاني (21 درجة): احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{e^{\sinh x}}{\operatorname{sech} x}\,dx$ (درجتان)

$$\int \frac{e^{\sinh x}}{\operatorname{sech} x}\,dx = \int e^{\sinh x}\cosh x\,dx$$

2

$$= e^{\sinh x} + c \, . \quad c \in \mathbb{R}$$

$u = \sinh x$

$du = \cosh x\,dx$

(درجتان) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^4}}$ (2)

نضع $u = x^2$ فإن $du = 2x\,dx$

$du = 2x^2 \frac{dx}{x} = 2u \frac{dx}{x}$

1 $\frac{dx}{x} = \frac{1}{2u}\,du$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{3^2-u^2}} = -\frac{1}{6}\,\text{sech}^{-1}\left(\frac{u}{3}\right)+c$$

1 $$= -\frac{1}{6}\,\text{sech}^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right)+c$$

(درجتان) $\int_1^e \ln x\, dx$ (3)

نستخدم التكامل بالتجزئة:

1 $u'(x) = 1 \qquad u(x) = x$

$v(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 1/x$

$$\int_1^e \ln x\, dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e x\cdot 1/x\, dx$$

1 $$= e - (e-1) = 1.$$

(درجتان) $\int \sin^5 x \cos^4 x\, dx$ (4)

$$\int \sin^5 x \cos^4 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \sin x\, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^4 x \sin x\, dx$$

1 $u = \cos x$

$du = -\sin x\, dx$

$$= -\int (1-u^2)^2 u^4\, du$$

$$= -\int [1+u^4-2u^2]\, u^4\, du$$

$$= -\int [u^4+u^8-2u^6]\, du$$

1 $$= -u^5/5 - u^9/9 + 2u^7/7 + c$$

(5) $\int \sin(10x)\cos(4x)\,dx$: مع العلم أن $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$ (درجتان)

1

$$\sin(10x)\cos(4x) = \frac{1}{2}\left[\sin(6x) + \sin(14x)\right]$$

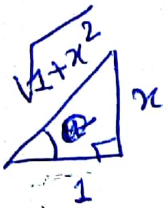
$$\int \sin(10x)\cos(4x)\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin(6x)+\sin(4x)\right]dx$$

1

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(6x)}{6} + \frac{\cos(4x)}{4}\right] + C$$

(6) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ (3 درجات)

نفرض $x = \tan\theta$ فإن $dx = \sec^2\theta\, d\theta$



$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}\, d\theta = \int \cos\theta\, d\theta$$

$$= \sin\theta + C$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{10-2x+x^2}}$ (3 درجات)

1 إكمال المربع

$$x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 - 1 + 10$$

$$= (x-1)^2 + 3^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{10-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2+(x-1)^2}}$$

2

$$= \sinh^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) + cst$$

$$= \ln\left(\frac{x-1+\sqrt{10-2x+x^2}}{3}\right) + cst$$

(3 درجات) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$ (8)

تجزئة الدالة كسرية : $\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$

$$= \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \right] dx$$

$$= A\int \frac{dx}{x-1} + \frac{B}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + C\int \frac{dx}{x^2+1}$$

1,5

$$= A \ln|x-1| + \frac{B}{2}\ln(1+x^2) + C\tan^{-1}x + c$$

حساب الثوابت A، B و C:

$\cdot\; A = \lim_{x\to 1} (x-1)f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$

1,5 $\cdot\; 0 = \lim_{x\to +\infty} x f(x) = A + B \Rightarrow B = -1/2$

$f(0) = -1 = -A + C \Rightarrow C = -1 + A = -1/2$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

(درجتان) $\int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{1/4}}$ (9)

نضع $u = x^{1/4}$ فإن $u^4 = x$ ؛ $x^{1/2} = u^2$

عندئذ $dx = 4u^3\,du$

1

$$\int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{1/4}} = \int \frac{4u^3\,du}{u^2+u} = 4\int \frac{u^2}{1+u}\,du$$

$$= 4\int \frac{u^2-1+1}{1+u}\,du$$

$$= 4\int \left[u - 1 + \frac{1}{1+u}\right] du$$

$$= 4\left[\frac{u^2}{2} - u + \ln|1+u|\right] + cst$$

1

$$= 2u^2 - 4u + 4\ln|1+u| + c$$

$$= 2\sqrt{x} - 4x^{1/4} + 4\ln|1+x^{1/4}| + c$$

Scanned by CamScanner