جامعة الملك سعود- كلية العلوم قسم الرياضيات.	امتحان شهري أول ٢٠٩ ريض الفصل الثاني ١٤٤١هـ	يوم الخميس ١٤٤١/٧/١٠ هـ الزمن : ساعة ونصف.

السؤال الأول (9): أ) اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية .

$\{2^{-n}\sin(2n)\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{(1+3n)^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\left\{\frac{n^2}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

ب) أوجد قيمة الثابتين A ، B بحيث تكون العلاقة التالية محققة .

$$\frac{1}{n(n-1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n-1} \quad .$$

ج) برهن أن المتسلسلة التالية متقاربة وما هو مجموعها؟ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$.

السؤال الثاني (10) : أ) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية :

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,(\ln n)^2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{3}{n^2})$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n}{2n+5})$.

ب) بين فيما إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة مطلقا" ، متقاربة شرطيا" أو متباعدة .

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{n\,3^{n+1}}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^3+e^n}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+3}}$.

السؤال الثالث (6) : أوجد فترة ونصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى التالية :

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+4)^n \quad .$$

Scanned with CamScanner

الاختبار الشهري الأول، المقرر (ح.ع) رمزيا

الفصل الثاني ١٤٤١هـ

السؤال الأول: (٢)

(2) 1) $\left\{ z^n \sin(zn) \right\}_1^\infty$ متقاربة

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sin 2n}{2^n} \right| \le \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sin 2n}{2^n} \right| = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin 2n}{2^n} = 0$

(2) 2) $f(x) = (1+3x)^{1/x} = y$; $x \ge 1$, $\ln y = \frac{\ln(1+3x)}{x}$

$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x\to} \frac{\frac{3}{1+3x}}{1} = 0 \Rightarrow$

(2) $\ln y \to 0$ as $x \to \infty \Rightarrow e^{\ln y} = y \to e^0 = 1$

$\lim_{n\to\infty} (1+3n)^{1/n} = 1 \Rightarrow \{1+3n\}^{u_n}$ تؤول

متقاربة

(2) 3) $f(x) = \frac{x^2}{2x-1} - \frac{x^2}{2x+1} = \frac{2x^3 + x^2 - 2x^2 + x^2}{4x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{4x^2-1}$

$= \frac{1}{2}$

متقاربة $\left\{ \frac{n^2}{2n-1} \quad \frac{n^2}{2n+1} \right\}_1^\infty$ تؤول

(1) (ب)

Then $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1}$

$1 = An - A + Bn = n(A+B) - A$

$A+B = 0$, $-A = 1 \Rightarrow A = -1$, $B = 1$

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1}$$

(2) (ج)

$S_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$

$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

$S_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$

تؤول لمتسلسلة

متقاربة $\sum_2^\infty \frac{1}{n(n-1)} = 1$

Scanned with CamScanner

السؤال الثاني:

(أ)

١) $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$ متباعدة لأن $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ ①

ب) حالة $\sum_{1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ متقاربة لأن $p=2>1$

حالة $\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ متباعدة لأن $p=\frac{1}{2}<1$ ①

إذاً $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n^2}\right)$ متباعدة

ج) نأخذ الدالة $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$، $x \geq 2$، إذاً f متصلة وموجبة على $[2,\infty)$

وكذلك $f'(x) = -\frac{(\ln x)^2 + 2(\ln x)}{x^2(\ln x)^4} < 0$ ①

إذاً نستخدم اختبار التكامل حيث

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{l\to\infty} \int_{2}^{l} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{l\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln l} + \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}$$

متقارب ①

إذاً $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ متقاربة

د) ١) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} = 0$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$، $x \geq 1$، $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x+3}^3} < 0$، $x \geq 1$ ①

إذاً (a_n) متناقصة إذاً $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$ متقارب حسب اختبار ليبنتز

وكذلك $\sum_{1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}\right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \simeq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ①

(b_n و c_n)

لأن $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1 > 0$ حسب اختبار المقارنة النهائية

بما أن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة لأن $p=\frac{1}{2}<1$

فإن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ متباعدة

وبالتالي فإن $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ متقاربة شرطياً ①

Scanned with CamScanner

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^3+e^n} \right| \le \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ متقاربة $p=3>1$ أو $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ متقاربة هندسية $|r|=\frac{1}{e}<1$

إذن $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+e^n}$ متقاربة مطلقاً

---

(3) $u_n = (-1)^n \frac{5^n}{n\,3^{n+1}}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5^n}{n3^n \cdot 3}\right)^{1/n}$

(2) $= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^{1/n} 3 \cdot 3^{1/n}} = \frac{5}{3} > 1$

إذن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n\,3^{n+1}}$ متباعدة

(يمكن أيضاً استخدام اختبار النسبة)

السؤال الثالث:

$\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1} (x+4)^n$ u_n

$x \neq -4$ لأنه عندها $x=-4$ تؤول المتسلسلة متقاربة

(3) واستخدام اختبار النسبة:

$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}|x+4|^{n+1}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}|x+4|^n} = |x+4| \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{n+1}{n+2}$

$= |x+4|(1)(1) = |x+4|$

إذن المتسلسلة متقاربة مطلقاً لكل x تحقق $|x+4|<1 \iff -1<x+4<1$

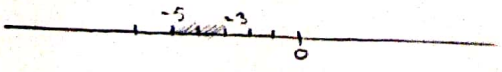
$\iff -5<x<-3$ أو $x \in (-5,-3)$

(1) عندما $x=-3$ لدينا $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ متقاربة حسب اختبار المتسلسلة المتناوبة

(1) عندما $x=-5$ لدينا $\sum_{2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \simeq \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة حسب اختبار المتسلسلة p

إذن منطقة التقارب هي $I = (-5,-3]$ (1/2)

نصف قطر التقارب هو $r=1$ (1/2)



Scanned with CamScanner