الاختبار الشهري الأول للمقرر 111 ريض للفصل الأول 1439-1438 هـ	كلية العلوم – قسم الرياضيات	جامعة الملك سعود King Saud University
الزمن: ساعة ونصف. الدرجة:	الإسم: .... الرقم الجامعي:.................................. أستاذ المقرر:..................................	

ملاحظات : 1. عدد الورقات 3 2. ممنوع استخدام الالة الحاسبة.

السؤال الأول (3 درجات): استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_0^2 (6x-5)\,dx$.

① $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\right)$

$a=0 \;;\; b=2 \;;\; f(x)=6x-5$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \;;\; x_k = a+k\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{2k}{n} \;; 0\le k\le n$

① $f(x_k) = 6\left(\frac{2k}{n}\right)-5 = \frac{12k}{n}-5$

① $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{12}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - 5\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{12}{\cancel{n}}\,\frac{\cancel{n}(n+1)}{2} - 5n = 6(n+1)-5n$

$= n+6$

$\int_0^2 (6x-5)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}[n+6] = \underline{\underline{2}}.$

check : $\int_0^2 (6x-5)\,dx = \left[3x^2-5x\right]_0^2 = 12-10 = 2.$

السؤال الثاني (3 درجات): أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{x+2}$ على الفترة $[-1,2]$.

بما أن f متصلة على $[-1,2]$ فإنه يوجد $c\in(-1,2)$ بحيث

$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$

$a=-1 \;;\; b=2 \;;\; f(x)=\sqrt{x+2}$

① $\int_{-1}^{2} \sqrt{x+2}\,dx = (2-(-1))\sqrt{c+2}$

$\frac{2}{3}\left[(x+2)^{3/2}\right]_{-1}^{2} = 3\sqrt{c+2}$

① $2/3\left[4^{3/2}-1\right] = 3\sqrt{c+2} \Rightarrow \frac{2}{3}\left[2^3-1\right] = 3\sqrt{c+2}$

$\frac{14}{3} = 3\sqrt{c+2}$

$\frac{14}{9} = \sqrt{c+2}$

① $c = \left(\frac{14}{9}\right)^2 - 2 = \frac{34}{81} \in (-1,2$

السؤال الثالث (3 درجات): إذا كانت $F(x)=\int_{2x-3}^{x^2} \ln(t^2)\,dt$ فأوجد $F'(2)$.

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(h(x))\,h'(x) - f(g(x))\,g'(x)$$

1 $$F'(x) = 2x \ln(x^4) - 2\ln\left((2x-3)^2\right)$$

1 $$F'(2) = 4\ln(2^4) - 2\ln 1 = 16\ln 2$$

السؤال الرابع (4 درجات): احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي:

(أ) $y=\sqrt{x}\,\ln x$ (درجة)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

0,5 0,5

(ب) $y=\left(\tan^{-1}x\right)^{\sin x}$ (3 درجات)

0,5 $$\ln|y| = \ln\left|(\tan^{-1}x)^{\sin x}\right|$$

0,5 $$\ln|y| = \sin x \ln|\tan^{-1}x|$$

1,5 $$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(|\tan^{-1}x|) + \sin x \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\tan^{-1}x}$$

0,5 $$y' = \left[\cos x \ln(|\tan^{-1}x|) + \frac{\sin x}{(1+x^2)\tan^{-1}x}\right](\tan^{-1}x)^{\sin x}$$

السؤال الخامس (12 درجات): احسب التكاملات التالية:

(1) $\int \sqrt{x}\,(x+1)^2\,dx$ (درجتان)

0,5 $$\int \sqrt{x}(x+1)^2 dx = \int x^{1/2}(x^2+2x+1)\,dx$$

0,5 $$\int \sqrt{x}(x+1)^2 dx = \int \left[x^{5/2} + 2x^{3/2} + x^{1/2}\right] dx$$

1 $$= \frac{2}{7}x^{7/2} + 2\cdot\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + c$$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\,dx$ (درجتان)

$$\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2+1}}dx = \int x(x^2+1)^{-1/5}dx$$

0,5
$u = x^2+1$
$du = 2x\,dx$
$x\,dx = \frac{1}{2}du$

0,5 $$= \frac{1}{2}\int u^{-1/5}\,du$$

1 $$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}u^{4/5} + c = \frac{5}{8}(x^2+1)^{4/5} + c$$

(درجتان)

$$\int \frac{x^2+\cos x}{x^3+3\sin x}\,dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+\cos x}{x^3+3\sin x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3\cos x}{x^3+3\sin x}\,dx$$

2

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x^3+3\sin x\right| + cst$$

(درجتان)

$$\int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx \quad (4)$$

$$\int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx = \int \csc^2 x\, e^{\cot x}\,dx$$

$u = \cot x$

$du = -\csc^2 x\,dx$

1

$$= -\int e^u\,du$$

$$= -e^u + cst$$

1

$$= -e^{\cot x} + cst$$

(درجتان)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \quad (5)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = 2\int \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$u = 1+\ln x$

1 $du = \frac{dx}{x}$

$$= 2\sqrt{u} + C$$

1

$$= 2\sqrt{1+\ln x} + C$$

(درجتان)

$$\int \frac{3^x}{\sqrt{1-3^{2x}}}\,dx \quad (6)$$

$$\int \frac{3^x}{\sqrt{1-3^{2x}}}\,dx = \int \frac{3^x}{\sqrt{1-(3^x)^2}}\,dx$$

$u = 3^x$

1 $du = (\ln 3)\,3^x\,dx$

$3^x dx = \frac{1}{\ln 3}\,du$

$$= \frac{1}{\ln 3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\ln 3}\sin^{-1}(u) + c$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\sin^{-1}(3^x) + C.$$

1