جامعة الملك سعود.	الإ متحان الفصلي الأول 209 ريض.	الإثنين 1438/7/13 هـ.
كلية العلوم.	قسم الرياضيات –الفصل الثاني-1438/1437هـ .	الزمن : ساعة ونصف.

السؤال الأول (8): أ) اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية :

$$\left\{(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ، \quad \left\{\frac{\sin(2n)+1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ، \quad \left\{(-1)^n \frac{n^2}{n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty} .$$

ب) برهن أن المتسلسلة التالية : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ متباعدة.

السؤال الثاني (10): أ) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n} \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^3+1} \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{4}{n}\right) \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) .$$

ب) بين فيما إذا كانت المتسلسلة التالية متقاربة مطلقا" او متقاربة شرطيا".

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} .$$

السؤال الثالث(7) : أ) أوجد فترة ونصف قطر التقارب للمتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^n}(x-3)^n .$$

ب) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة $f(x) = \dfrac{1}{5+3x}$ وماهي فترة تقاربها؟

ثم استنتج متسلسلة القوى في x للدالة $g(x) = \dfrac{x}{(5+3x)^2}$.

السؤال الأول: (أ)

1) $0 \le \left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ عندما $n \to \infty$

(2) إذن $\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right) = 0$

---

2) $0 \le \left| \frac{\sin(2n)+1}{2^n} \right| \le \frac{2}{2^n} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$

(2) إذن $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2n)+1}{2^n} = 0$

---

3) $\left\{ (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} \right\}$ بما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2} = 1 \neq 0$ إذن متباعدة

(2)

(ب)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$$

(2)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n}{n^n \cdot \cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

إذن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ متباعدة

---

1)

السؤال الثاني: $f(x) = x e^{-x}$ متصلة على $[2,\infty)$ ، موجبة ،

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) e^{-x} < 0$$

(2) لكل $x \ge 2$ ، الآن نختبر التقارب

$$\int_2^\infty x e^{-x} dx = \lim_{l\to\infty} \int_2^l x e^{-x} dx = \lim_{l\to\infty} \left[-x e^{-x} \right]_2^l + \lim_{l\to\infty} \int_2^l e^{-x} dx$$ متقارب

$$= \lim_{l\to\infty} \left[-l e^{-l} + 2e^{-2} \right] - \lim_{l\to\infty} \left[e^{-l} - e^{-2} \right]$$

$$= 2e^{-2} + e^{-2} = 3e^{-2}$$

إذن $\sum_{2}^{\infty} n e^{-n}$ متقاربة.

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^3+1} \le \sum_{1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+1} < 2\sum \frac{1}{n^2}$ ، حيث $\ln n < n$

متقاربة $P=2>1$

(2)

إذاً المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^3+1}$ متقاربة

---

3) متقاربة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ، $-4\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$

متقاربة $P=2>1$ متباعدة

(2)

إذاً $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{4}{n}\right)$ متباعدة

---

4) $a_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ ، $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n =$

$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(2)

$= -\cancel{\ln 2} + (\cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3}) + \dots + (\cancel{\ln(n-1)} - \cancel{\ln n}) + (\cancel{\ln n} - \ln(n+1))$

$S_n = -\ln(n+1) \longrightarrow -\infty$

إذاً $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ متباعدة

ب)

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \longrightarrow 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$; $x \ge 2$

(1)

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0$

لأن

$1-x<0 \Leftarrow x \ge 2 > 1$

حسب اختبار التناوب، تكون المتسلسلة $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ متقاربة

ولكن

(1)

$\sum_{2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}\right| = \sum_{2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \approx \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

متباعدة ، $P=\frac{1}{2}<1$ إذاً

المتسلسلة $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ متقاربة شرطياً

السؤال الثالث:

أ)

$$x \neq 3 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{4^{n+1}}|x-3|^{n+1}}{\frac{n+1}{4^n}|x-3|^n},$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\frac{|x-3|}{4} = \frac{|x-3|}{4}$$

(3)

إذاً المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{4^n}(x-3)^n$ متقاربة لكل $x\in\mathbb{R}$ تحقق $|x-3|<4$

إذاً نصف قطر التقارب $(r=4)$ ، $-4<x-3<4 \Leftarrow -1<x<7$

$x \in (-1, 7)$

عندما $x=7$ لدينا $\sum_{1}^{\infty}(n+1)$ متباعدة لأن $\lim_{n\to\infty}(n+1)\neq 0$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

عندما $x=-1$ لدينا $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ متباعدة لأن $\lim_{n\to\infty}(n+1)\neq 0$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

إذاً فترة التقارب هي $\boxed{I=(-1, 7)}$

ب)

$$f(x) = \frac{1}{5+3x} = \frac{1}{5\left(1+\frac{3x}{5}\right)} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{1+u}$$

حيث $u=\frac{3x}{5}$ ، ومنه

(2)

$$f(x) = \frac{1}{5}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n u^n = \frac{1}{5}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{5^n}x^n \quad , \quad |u|<1$$

أو $\left|\frac{3}{5}x\right|<1 \Rightarrow |x|<\frac{5}{3}$ فترة التقارب

$$f'(x) = \frac{1}{5}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n n\frac{3^n}{5^n}x^{n-1} = \sum_{1}^{\infty}(-1)^n n\frac{3^n}{5^{n+1}}x^{n-1}$$

$$= \frac{-3}{(5+3x)^2}$$

(1)

$$\frac{1}{(5+3x)^2} = \frac{-1}{3}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n n\frac{3^n}{5^{n+1}}x^{n-1} \qquad |x|<\frac{5}{3}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{x}{(5+3x)^2} = \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\,3^{n-1}}{5^{n+1}}x^n} \quad , \quad |x|<\frac{5}{3}$$