جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم – قسم الرياضيات	الاختبار الشهري الأول للمقرر 111 ريض للفصل الصيفي 1439-1438 هـ
الإسم: .... الرقم الجامعي:.................................. أستاذ المقرر:..................................		الزمن: ساعة ونصف. الدرجة:

ملاحظات : 1. عدد الورقات 4 2. ممنوع استخدام الالة الحاسبة.

السؤال الأول (9 درجات):

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_1^2 (2x+5)\,dx$. (3 درجات)

1

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\right)$$

$a=1$; $b=2$; $f(x)=2x+5$

1

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \; ; \quad x_k = a+k\left(\frac{b-a}{n}\right) = 1+\frac{k}{n}$$

$0 \le k \le n$

$$f(x_k) = 2\left(1+\frac{k}{n}\right)+5 = 7+\frac{2k}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n}\left[7+\frac{2k}{n}\right] = 7(n+1)+\frac{2}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} = 8(n+1)$$

1

$$\int_1^2 (2x+5)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,8(n+1) = 8.$$

<u>check</u> $\int_1^2 (2x+5)\,dx = \left[x^2+5x\right]_1^2 = 14-6=8$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ على الفترة $[1,4]$. (3 درجات)

$f(x)=\sqrt{x}$ دالة متصلة على $[1,4]$ (مغلقة ومحدودة)

إذاً يوجد $c\in(1,4)$ بحيث

1

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = (4-1)\sqrt{c}$$

1

$$\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_1^4 = 3\sqrt{c}$$

1

$$\frac{2}{9}(8-1) = \sqrt{c} \implies c = \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{196}{81} \approx 2{,}42 \in (1,$$

(3) جد $F'(1)$ إذا كانت $F(x)=\int_x^{2x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt$.　　(3 درجات)

1 $\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right) = f(h(x))\,h'(x) - f(g(x))\,g'(x)$

$f(t)=\sqrt{1+t^4}$; $h(x)=2x^2$; $g(x)=x$

$F'(x) = f(2x^2)\cdot 4x - f(x)\cdot 1$

1 $F'(x) = \sqrt{1+(2x^2)^4}\cdot 4x - \sqrt{1+x^4}$.

1 $F'(1) = 4\sqrt{17} - \sqrt{2}$.

السؤال الثاني (4 درجات): احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y=(\csc x)(\ln x)$, $x>0$　　(درجتان)

$\frac{dy}{dx} = -\cot x \csc x \ln x + \csc x\cdot\frac{1}{x}$

1　1

(2) $y=(\sin x)^{\tan x}$.　　(درجتان)

$\ln|y| = \ln\left|(\sin x)^{\tan x}\right|$

1 $\ln|y| = \tan x\cdot\ln|\sin x|$

$\frac{y'}{y} = \sec^2 x\,\ln|\sin x| + \tan x\,\frac{\cos x}{\sin x}$

1 $y' = \frac{dy}{dx} = \left[\sec^2 x\,\ln|\sin x| + \tan x\cot x\right](\sin x)^{\tan x}$.

السؤال الثالث (12 درجة): احسب التكاملات التالية :

(1) $\int\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx$ (درجتان)

$$\int\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx = x^2+\ln|x|+c$$

(2) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ (درجتان)

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+1)^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+c$$

(3) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^6-9}}$ (درجتان)

نأخذ $u = x^3$ فإن $du = 3x^2\,dx$

$du = 3u\,\frac{dx}{x} \Leftarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{3u}$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^6-9}} = \frac{1}{3}\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-3^2}}$$

$$= \frac{1}{9}\sec^{-1}\left(\frac{u}{3}\right)+c$$

$$= \frac{1}{9}\sec^{-1}\left(\frac{x^3}{3}\right)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

(4) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (درجتان)

$u = \sin^{-1} x$

$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin^{-1} x\right)^2 + C$$

(5) $\int \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta}\,d\theta$ (درجتان)

$u = \cos\theta$ نضع

$du = -\sin\theta\,d\theta$

$$\int \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta}\,d\theta = -\int \frac{du}{1+u^2} = -\tan^{-1} u + C$$

$$= -\tan^{-1}(\cos\theta) + C$$

(6) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+7}\,dx$ (درجتان)

$u = x^3 + 3x + 7$

$du = (3x^2+3)\,dx = 3(x^2+1)\,dx$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+7}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3+3x+7| + C$$