| اختبار الشهري الأول 209 ريض<br>للفصل الدراسي الأول 1439- 1440 هـ | كلية العلوم - قسم الرياضيات | جامعة الملك سعود King Saud University |
| --- | --- | --- |

**السؤال الأول : (10 درجات)**

(أ) اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية:

$$\left\{(-1)^n \frac{n+2}{3n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{\cos(\pi n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{7^{-n}}{\sec n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{(2n+1)!}{5^{2n}}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

(ب) برهن ان المتسلسلة التالية $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{e}{\pi}\right)^n + \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right]$ متقاربة و ماهو مجموعها؟

**السؤال الثاني: (7.5 درجة)**

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+5}{\sqrt{3n^5+n^4+25}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{3^{n+1}}$$

**السؤال الثالث: (7.5 درجة)**

(أ) بين فيما إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة مطلقا, شرطيا أو متباعدة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2+1}$$

(ب) أوجد فترة و نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى في :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{10^n}(x-4)^n.$$

س١ (١٥ درجات)

أ) $\left\{(-1)^n \frac{n+2}{3n-1}\right\}_n$ ⊗

(1.5)

نضع $a_n=(-1)^n\frac{n+2}{3n-1}$

بما أن

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n-1}=\frac{1}{3}\neq 0$$

فإن $\{a_n\}$ متباعدة.

$\left\{\frac{\cos(\pi n)}{n}\right\}$ ⊗

$$a_n = \frac{\cos(\pi n)}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$$

(1.5)

$$|a_n| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

فإن $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos \pi n}{n}=0$

$\left\{\frac{7^{-n}}{\sec n}\right\}$ ⊗

$\frac{1}{5}$

$$a_n = \frac{7^{-n}}{\sec n} = \frac{\cos n}{7^n}$$

نستخدم نظرية التطويق

$$\left|\frac{\cos n}{7^n}\right| \le \frac{1}{7^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Scanned by CamScanner

$\frac{1}{1+t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{e}{\pi}\right)^{n}+\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right] \quad (٢)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{n}$ هندسية $-1<r=\frac{e}{\pi}<1$ متقاربة

ومجموعها $\left(\frac{1}{1-\frac{e}{\pi}}-1\right)$ (1,5)

فإن $\left\{\frac{7^{-n}}{\operatorname{sech} n}\right\}$ متقاربة للصفر (1,5)

$\left\{\frac{(2n+1)!}{5^{2n}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ هي متباعدة (1,5)

$$a_n=\frac{(2n+1)!}{5^{2n}}=5\left(\frac{2n+1}{5}\right)\left(\frac{2n}{5}\right)\left(\frac{2n-1}{5}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$$

نعلم $\frac{1}{5}e^{5}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\ln a_n = n\ln(1+1/n) = \dfrac{\ln(1+(1/n))}{(1/n)} \underset{t=(1/n)}{} \xrightarrow[t\to 0]{} \dfrac{\ln(1+t)}{t} \underset{\text{لوبيتال}}{=} \dfrac{1}{1+t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

متقاربة

$\sum a_n = \sum_{n=2} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$

موجبة

اختبار التكامل

$f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

$f' < 0$ على $(2,\infty)$

$\int_2^\infty \dfrac{dx}{x(\ln x)^2} < \infty$

1,5

$\int_{\ln 2}^{\infty} \dfrac{du}{u^2} = \left[-\dfrac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\infty} = +\dfrac{1}{\ln 2} < \infty$

س2

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

اختبار التباعد

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{1/n}}$

$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}$

$= e^1 \neq 0$

1,5

1

علما $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ متباعدة

متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

(اختبار نهاية المقارنة

(متسلسلة $p$ $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$
$p=2>1$)

1,5

ومجموعها يساوي

$1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n + \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$ مجموع

متقاربة ومجموعها

$\dfrac{1}{\pi - e} = \left(\dfrac{\pi}{\pi-e} \cancel{-1} + \cancel{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$

(ب)

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n + \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\right]$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n$ هندسية $-1 < r = \dfrac{e}{\pi} < 1$

متقاربة

ومجموعها

$\left(\dfrac{1}{1-\frac{e}{\pi}} - 1\right)$

1,5

ه $\sum \frac{n^2+5}{\sqrt{3n^5+n^4+25}}$ موجبة

نستخدم اختبار نهاية المقارنة

$$a_n = \frac{n^2+5}{\sqrt{3n^5+n^4+25}}$$

نأخذ $b_n = \frac{n^2}{\sqrt{3n^5}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n^{1/2}}$

بما أن $\frac{a_n}{b_n} = 1$ لها و $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$

و $\sum a_n$ موجبة $= \sum_n n^2 e^{-n}$

$$a_n = \frac{n^2}{e^n} > 0$$

نستخدم اختبار النسبة

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^2}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{e} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

1,5

فهي متقاربة

س٣

(أ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ مترددة

نستخدم اختبار المتسلسلة المترددة:

$a_n = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\left\{a_n = \frac{1}{2n+1}\right\}$ ↙

فهي متقاربة.

بما أن $\sum \left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right| = \sum \frac{1}{2n+1}$ متباعدة

(متسلسلة p حيث $p = \frac{1}{2} < 1$ فهي متباعدة)

فإن $\sum a_n$ متباعدة. (1.5)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{3^{n+1}}$ موجبة متباعدة

اختبار التباعد: $\frac{(2n+1)!}{3^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

اختبار النسبة:

(1.5) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)!}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{(2n+1)!}$

$= \frac{(2n+3)(2n+2)}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty > 1$

$\sum$ موجبة

نهائية

$a_n$

$b_n$

$\sum \frac{1}{n^{1/2}}$

فهي متقاربة تقاربا كليا

(1,5)

• $\sum_{n=} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}}$ مترددة

ندرس $\sum \left|\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}\right| = \sum \frac{1}{5^{n+1}}$

$= \frac{1}{5}\sum \left(\frac{1}{5}\right)^n$

هندسية $0 < r = \frac{1}{5} < 1$

فهو متقارب

فإن $\sum \frac{(-1)^n}{5^{n+1}}$ متقاربة تقاربا مطلقا

(1,5)

• $\sum \frac{\sin n}{n^2+1}$ لا مترددة ولا موجبة

بما أن $\left|\frac{\sin n}{n^2+1}\right| \le \frac{1}{n^2+1}$

ونعلم أن $\sum \frac{1}{n^2+1}$ متقاربة

(اختبار المقارنة $\sum 1/n^2$ متقاربة)

$n \to \infty$

فإن $\sum \frac{\sin n}{n^2+1}$ متقاربة تقاربا مطلقا

(ب) $\sum_n \frac{(n+1)}{10^n}(x-4)^n$

$= \sum a_n(x)$

حيث: $a_n(x) = \frac{(n+1)}{10^n}(x-4)^n$

ندرس $\sum |a_n(x)|$ ونستخدم اختبار النسبة

$$\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \frac{n+2}{10^{n+1}}|x-4|^{n+1}\frac{10^n}{(n+1)|x-4|^n}$$

$$= \frac{n+2}{n+1}\,\frac{|x-4|}{10} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|x-4|}{10} = L$$

(1,5)

• إذا كان $L<1 \Leftrightarrow |x-4|<10 \Leftrightarrow$

(1)

$$-10 < x-4 < 10$$
$$-6 < x < 14$$

فإن $\sum$ متقاربة تقارباً مطلقاً.

• إذا كان $L>1$ يعني $x>14$ أو $x<-6$ فإن $\sum$ متباعدة.

(0,5)

• وإذا كان $L=1$ فإن $x=14$ أو $x=-6$.

• عندما $x=14$، فإن $\sum$ تصبح $\sum (n+1)$ متباعدة

(0,5)

• عندما $x=-6$ فإن $\sum$ تصبح $\sum (-1)^n(n+1)$ أيضاً متباعدة

نستنتج أن فترة التقارب هي $(-6,14)$

ونصف قطر التقارب $R=\frac{14+6}{2}=10$

(0,5)