جامعة الملك سعود –كلية العلوم .	الامتحان النهائي للمقرر(209) ريض	الفصل الثاني .1437/1436هـ
قسم الرياضيات .	.الأربعاء.1437/8/16 هـ	ثلاث ساعات ..

السؤال الأول (8) : أ) اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية :

$$\left\{\frac{\cos(2n)+3}{\sqrt{9n^2+4}}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ، \quad \left\{n\tan(\frac{1}{n})\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ، \quad \left\{2(-1)^n+\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} .$$

ب) برهن أن المتسلسلة التالية متقاربة ثم احسب مجموعها: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{2^n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

السؤال الثاني (8): اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)e^{-n} \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3}{n^4+5n} \quad ، \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(\ln n)^n} \quad ، \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1} .$$

السؤال الثالث (5): أ) أوجد متسلسلة فورييه للدالة التالية : $f(x)=\begin{cases}0\,;-\pi<x<0\\ 2\,;0\le x<\pi\end{cases}$ ، حيث

$f(x+2\pi)=f(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

ب) من أ) استنتج من متسلسلة فورييه وعند $x=\frac{\pi}{2}$ صحة العلاقة التالية : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

(استفد من العلاقة $\sin(\frac{2n-1}{2}\pi)=(-1)^{n-1}\,;\ n\in\mathbb{N}$)

السؤال الرابع(4): أ) أوجد متسلسلة ماك لورين للدالة $f(x)=\frac{-2x}{4-x^2}$ وماهي فترة تقاربها؟

ب) من أ) استنتج متسلسلة ماك لورين للدالة $g(x)=\ln(4-x^2)$.

ج) من ب) استنتج صحة العلاقة التالية : $\ln(\frac{3}{4})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)4^{n+1}}$

<u>السؤال الخامس (15):</u> أ) برهن أن المعادلة التفاضلية التالية تامة ثم أوجد حلها :

$$3y(x^2-1)dx + (x^3+8y-3x)dy = 0 \,.$$ 5

ب) أوجد حل المسألة التفاضلية التالية : $\begin{cases} y\,dx + x\left[\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)-1\right]dy = 0 \\ y(1) = e \end{cases}$. 5

حيث $x > 0\,,\, y > 0$ **و** $x \neq y$.

ج) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية : $x > -1\,;$ $\quad (1+x)y' - xy = (x+x^2)e^x$ 5

السؤال الأول :

أ)

1) $0 \le \dfrac{\cos(n)+4}{\sqrt{9n^2+4}} \le \dfrac{5}{\sqrt{9n^2}} = \dfrac{5}{3n} \to 0$ وحسب نظرية الحصر لدينا

2 $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n+4}{\sqrt{9n^2+4}} = 0$

2) $f(x) = x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$, $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\tan(1/x)}{1/x} =$ ومنها نستخدم قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sec^2(1/x)\cdot(\cancel{-1/x^2})}{(\cancel{-1/x^2})} = 1$$

2   إذاً

$\displaystyle \lim_{n\to\infty} n\tan(1/n) = 1$

2 3)   بما أن $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(-1)^n$ غير موجودة ،

$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$

إذاً

$\left\{2(-1)^n + \dfrac{2n}{n+1}\right\}$ متباعدة

ب)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = \left(1-\tfrac{1}{2}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n-1} - \cancel{\tfrac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

1 $\displaystyle \lim_{n\to\infty} S_n = 1$ وبما أن

إذاً $\displaystyle \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ متقاربة

$\displaystyle \sum_{1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)$ هندسية ،

$a = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$

1 $\displaystyle 3\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \cdot \frac{1/2}{1-1/2} = 3$ إذاً

إذاً

$\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = 3 - 1 = 2$ متقاربة

السؤال الثاني :

1) $\displaystyle \sum_{1}^{\infty}(n+2)e^{-n}$ متقاربة ، $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+3)e^{-n-1}}{(n+2)e^{-n}} =$

2 $\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$

---

2) $\displaystyle \sum_{1}^{\infty} \overset{a_n}{\frac{2n^2+3}{n^4+5n}} \simeq \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ أو $\displaystyle \sum_{1}^{\infty} \overset{b_n}{\frac{1}{n^2}}$

ولكن

2 $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n^2(2n^2+3)}{n^4+5n} = 2 > 0$$

بما أن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة (P-series / $P=2>1$)

إذن $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{n^4+5n}$ متقاربة

---

3) 2 $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|(-1)^{n+1}|}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)} = 0 < 1$$

حسب $\sum_{2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(\ln n)^n}$ متقاربة مطلقاً (تقارب مطلق)

---

4) 1 $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1-1/n^2} = 0$$

1 $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$; $x \geq 2$,

$$f'(x) = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} < 0 \; ; \; x \geq 2$$

إذن $(a_n) = \left(\frac{n}{n^2-1}\right)$ متناقصة

إذن $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ متقاربة حسب اختبار المتناوبة

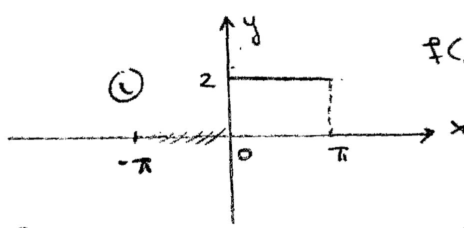
السؤال الثالث : أ)

6

$f(x+2\pi) = f(x)$

$x \in \mathbb{R}$.

1



1 $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2\,dx = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

1 + 1

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi} = 0 \; , \; a_n = 0 \; ; \; n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx\,dx$$

$$= \frac{-2}{\pi n}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)}$$

1 $$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) \sin nx$$

$-\pi < x < \pi$

ب) عند $x=\frac{\pi}{2}$ لدينا

(2)

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}^+)+f(\frac{\pi}{2}^-)}{2}=f(\frac{\pi}{2})=2=1+\sum_{1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\left(1-(-1)^{2n-1}\right)\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)$$

$$1=\sum_{1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}(-1)^{n-1}$$

لذا

$\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)=(-1)^{n-1}$ حيث ،

$$\boxed{\frac{\pi}{4}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}}$$

السؤال الرابع:

$x^2<4$
$4-x^2$

أ)

(2)

$$\frac{1}{4-x^2}=\frac{1}{4(1-\frac{x^2}{4})}=\frac{1}{4}\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n}\ ;\ |x|<2$$

لذا

$$\boxed{\frac{-2x}{4-x^2}=-\sum_{0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{4^{n+1}}\ ;\ |x|<2}$$

ب)

$x\in(-2,2)$ ، $\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\frac{-2t}{4-t^2}\,dt=\left[\ln(4-t^2)\right]_0^x$

(2)

$$=-\sum_{0}^{\infty}\frac{2}{4^{n+1}}\int_0^x t^{2n+1}\,dt$$

$$\ln(4-x^2)-\ln 4=-\sum_{0}^{\infty}\frac{2x^{2n+2}}{(2n+2)4^{n+1}}\quad |x|<2$$

$$\boxed{\ln(4-x^2)=\ln 4-\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)4^{n+1}}\ ;\ |x|<2}$$

ج) بأخذ $x=1$ لدينا

(2)

$$\boxed{\ln\left(\frac{3}{4}\right)=\ln 3-\ln 4=-\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}}$$

السؤال الخامس:

أ)

$$3y(x^2-1)\,dx+(x^3+8y-3x)\,dy=0$$

(2)

$$\underbrace{(3yx^2-3y)}_{M}\,dx+(\underbrace{x^3+8y-3x}_{N})\,dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2-3=\frac{\partial N}{\partial x}$$

لذا المعادلة تامة وبالتالي توجد F تابع x ، y حيث

(3)

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3yx^2-3y,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=x^3+8y-3x$$

$$F(x,y)=\int(3yx^2-3y)\,dx=yx^3-3yx+\phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^3-3\cancel{x}+\phi'(y)=x^3+8y-\cancel{3x}$$

$\phi'(y) = 8y \Rightarrow \phi(y) = 4y^2 + c$

إذاً حل المعادلة التفاضلية هو مجموعة المنحنيات

(1) $\boxed{F(x,y) = yx^3 - 3yx + 4y^2 + c = 0}$

ب

$y\,dx + x\left[\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right]dy = 0$ المعادلة هي متجانسة إذاً نفرض أن

(2) $\frac{x}{y} = u$

$x = yu \Rightarrow dx = y\,du + u\,dy$

$dx + \frac{x}{y}\left[\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right]dy = 0$

$y\,du + u\,dy + u[\ln u - 1]dy = 0$

(2) $y\,du + u\ln u\,dy = 0 \Rightarrow \int \frac{du}{u\ln u} + \int \frac{dy}{y} = 0 ; \; u \neq 1$

$\ln|\ln u| + \ln y = c$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية $\boxed{\ln\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right| + \ln y = c}$ او

وتحقق الشرط الابتدائي $\Leftarrow y(1) = e$

(1) $\ln(1) + 1 = c \Leftarrow \ln\left|\ln\frac{1}{e}\right| + \ln e = c$

إذاً $\boxed{c = 1}$

معناه فإن الحل الخاص هو

$\boxed{\ln\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right| + \ln y = 1}$

ج

$(1+x)y' - xy = x(x+1)e^x$

(1) $y' - \frac{x}{x+1}y = xe^x ; \; P(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

$\mu(x) = e^{-\int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx}$

(2) $= e^{-x + \ln(x+1)} = e^{-x} \cdot (x+1)$

$\mu(x)\,y = ye^{-x}(x+1) = \int x\,e^x \cdot e^{-x}(x+1)\,dx$

$= \int (x^2 + x)\,dx$

(2) $ye^{-x}(x+1) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية $\boxed{y(x+1) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c\right)e^x}$