الاختبار النهائي 487 ريض الفصل 1، 1436-37

ملاحظة: رتب أجوبتك في الدفتر بحسب ترتيب الأسئلة

1- إذا كان α منحنى بسيط مغلق بالاتجاه الموجب و كانت $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha}\dfrac{f(s)ds}{(s-z)}$ ، فاثبت أن $f'(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha}\dfrac{f(s)ds}{(s-z)^2}$.

2- إذا كانت $f(z)$ تحليلية و محدودة على كل المستوى □ ، فأثبت أنها لا بد أن تكون ثابتة.
أعطِ مثالاً على دالة حقيقية لها مشتقات من جميع الرتب و محدودة على □ و لكنها غير ثابتة.

3- عرف النقط الشاذة المنعزلة لدالة ، ثم صنفها بحسب مفكوك لوران مبيناً الصفة التي يتمتع بها كل نوع و كيفية حساب الراسب لكل منها.

4- احسب مفكوك لوران للدالة $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3}$ في الطوق $1<|z|<3$.

5- أثبت أن الدالة e^z تحليلية في □ ، ثم جد صورة المستطيل الذي رؤوسه $(0,0),(1,0),((0,\pi),(1,\pi)$ تحت تأثير الدالة.

6- جد جميع قيم المقدار $i^{(1+i)}$ ، ثم أشرح كيف يمكن أن نجعل الدالة $f(z)=i^z$ تحليلية و ما هي مشتقتها؟

7- احسب بواسطة الرواسب $\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{\cos(2x)dx}{(x^2+1)^2}$.

8- احسب بواسطة الرواسب $\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{4+3\cos\theta}$.

تصحيح الاختبار النهائي 487 ريض للفصل الأول 1437/36هـ

① $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(s)}{(s-z)}\,ds$$

$$f'(z) = \frac{d}{dz}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\oint_\alpha \frac{f(s)}{(s-z)}\,ds$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha f(s)\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{s-z}\right)ds$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{s-z}\right) = \frac{+1}{(s-z)^2}\ ; \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,ds.$$

② نظرية ليوفيل : f تحليلية ومحدودة على $\mathbb{C}$, تكون دالة ثابتة.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad ; \quad \sup_{\mathbb{C}} |f| = M < \infty$$

من خلال متباينة كوشي

$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ حيث $r>0$ و $n \geq 1$

$\lim_{r\to+\infty} \frac{M}{r^n} = 0$ فإن $a_n = 0$ لكل $n \geq 1$.

و بالتالي f هي دالة ثابتة (لكل $z \in \mathbb{C}$, $f(z) \equiv a_0$).

• خذ $f(x) = \sin x$ هي دالة محدودة و قابلة للاشتقاق من جميع الرتب لكنها غير ثابتة.

③ • لتكن f دالة معرفة على مجموعة مفتوحة D و f غير معرفة عند $z = z_0$ لكن معرفة على $0 < |z - z_0| < r$. فإننا نقول إن f لديها نقطة شاذة معزولة عند $z = z_0$.

• تكون النقطة الشاذة المعزولة $z = z_0$ للدالة f قابلة للإزالة إذا كان $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجودة و بالتالي فإن مفكوك لورانت على $0 < |z - z_0| < r$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ مثال خذ $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

• تكون النقطة الشاذة المعزولة $z = z_0$ للدالة f قطب من الرتبة m إذا كان $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)$ غير موجودة لكل $n < m$ لكن $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ موجودة

و بالتالي مفكوك لورانت للدالة f على $0 < |z - z_0| < r$ $(0 < r \ll 1)$

$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m-1}}{(z-z_0)^{m+1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$ لكل z بحيث $0 < |z - z_0| < r$ مثال: $f(z) = \frac{1}{z^5}$

$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\Big/_{z=z_0}$ (الرواسب لـ f عند z_0).

• تكون النقطة الشاذة المعزولة $z = z_0$ للدالة f نقطة أساسية إذا لا يوجد m بحيث $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ موجود و بالتالي لكل $0 < |z - z_0| < r$ حيث $0 < r \ll 1$

$f(z) = \dots\dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$ لكل $0 < |z - z_0| < r$ ، مثال: خذ $f(z) = e^{1/z}$

(4)

تحليلية على $f(z) = \frac{1}{z^2-4z+3} = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$

الطوق $A = \{ z / 1<|z|<3 \}$

و بالتالي f تحظى بمفكوك لورانت

لذا $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ $\quad 1<|z|<3$

فلنبحث عن قيم a_n.

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3}$$

$$A = \lim_{z\to 1} (z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{z\to 3} (z-3)f(z) = \lim_{z\to 3} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2}$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-3} \right]$$

بما أن $|z|>1$ فان $\left|\frac{1}{z}\right|<1$;

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z[1-1/z]} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

- بما أن $|z|<3$ فان $\left|\frac{z}{3}\right|<1$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{3(\frac{z}{3}-1)} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-z/3} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n/3^n$$

و بالتالي

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+1}} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} \right]$$

$$a_n = \begin{cases} -1/2 & ; \ n \leq -1 \\ -\frac{1}{2\cdot 3^{n+1}} & ; \ n \geq 0 \end{cases}$$

(5) نأخذ $z = x+iy$;

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x[\cos y + i\sin y]$$

$$= e^x \cos y + i\, e^x \sin y$$

$u = \mathrm{Re} f = e^x \cos y$; $v = \mathrm{Im} f = e^x \sin y$

بما أن $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ معادلتي كوشي ريمان تحققت

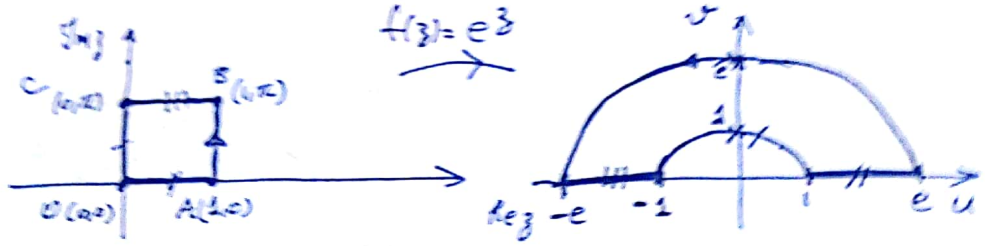
و f قابلة للاشتقاق فإن f تحليلية على $\mathbb{C}$.

$[OA] : [0,1] \to \mathbb{C}$
$\quad t \to t$

$[OC] : [0,1] \to \mathbb{C}$
$\quad t \to it\pi$

$[CB] : [0,1] \to \mathbb{C}$
$\quad t \to t + i\pi$

$[AB] : [0,1] \to \mathbb{C}$
$\quad t \to 1 + it\pi$



- $f([OA]) = f([0,1]) = [1, e]$
- $f(\overline{OC}) = \frac{1}{2}\,\mathcal{C}(0,1)$
- $f([CB]) = [-e, -1]$
- $f([AB]) = \frac{1}{2}\,\mathcal{C}(0, e)$

⑥ $\log \omega = (1+i)\log i \quad ; \quad \omega = i^{(1+i)}$

$\log \omega = (1+i)\left[\ln|i| + i \arg i\right]$

$\log \omega = (1+i)\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]$

$\log \omega = -\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$\log \omega = (-1+i)\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$\omega = e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)(-1+i)} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$\omega = i\, e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$

تحليلية على كامل ℂ $\qquad f(z) = i^z = e^{z \log i}$.

$\log i = \ln|i| + i \arg i$
$\quad = \ln 1 + i\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$
$\quad = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$f(z) = e^{iz\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$

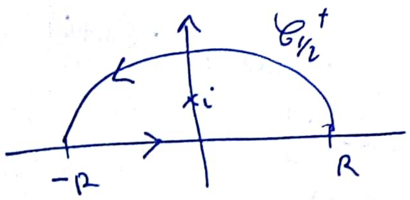
متعددة القيم $\qquad f'(z) = (\log i)\, i^z$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2+1)^2}\,dx$$

بما أن $f(x) = \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}$ هي دالة زوجية فإن

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2+1)^2}\,dx$$

نأخذ الآن $g(z) = \frac{e^{2zi}}{(1+z^2)^2}$ و $\Gamma_R^+ = \mathcal{C}^+_{1/2} \cup [-R,R]$



g لديها قطب من الرتبة الثانية عند $z=i$

باستخدام نظرية الرواسب

$$\oint_{\Gamma_R^+} g(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(g,i)$$

بما أن درجة المقام أكبر من الدرجة البسط $+1$ باستخدام مبرهنة جوردان

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\frac{1}{2}\mathcal{C}_R^+} g(z)\,dz = 0$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{2xi}}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 2x}{(1+x^2)^2}\,dx + i\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 2x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2x)}{(1+x^2)^2}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{(1+x^2)^2}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(2\pi i\,\mathrm{Res}(g,i)\right)$$

$$\mathrm{Res}(g,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\,\frac{e^{2iz}}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{2i\,e^{2iz}(z+i)^2 - 2e^{2iz}(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$= \lim_{z\to i} \left[\frac{2i\,e^{2iz}}{(z+i)^2} - \frac{2e^{2iz}}{(z+i)^3}\right]$$

$$= \frac{2i\,e^{-2}}{-4} - 2\frac{e^{-2}}{-8i} = \frac{-2i\,e^{-2}}{4} - \frac{i\,e^{-2}}{4} = \frac{-3i}{4}e^{-2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{3\pi}{2}e^{-2}$$

وبالتالي :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3\pi}{4}e^{-2}$$

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4+3\cos\theta}$$

نعلم أن $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ لكل $\theta \in R$.

لذا نضع $z = e^{i\theta}$ فإن $|z|=1$

$dz = i e^{i\theta} d\theta = i z\, d\theta$ يعني $d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$J = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left[4+3\left(\frac{z+1/z}{2}\right)\right]} \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2\cancel{z}}{[8z+3z^2+3]} \frac{dz}{i\cancel{z}} = -2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2+8z+3}$$

باستخدام نظرية الرواسب

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2+8z+3} = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} Res(f, z_k) = 2\pi i\, Res(f, z_2)$$

$$= \cancel{2}\pi i \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{7}} = \frac{i\pi}{\sqrt{7}}$$

$f(z) = \frac{1}{3z^2+8z+3} = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2}$ لكل $z \in \mathbb{C}\setminus\{z_1, z_2\}$

$$3z^2+8z+3=0$$

$a=3 \ ; \ b=8 \ ; c=3$

$\Delta = b^2-4ac = 64 - 4\times3\times3 = 64-36 = 28 = 4\cdot7$

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-2\sqrt{7}}{6} = \frac{-4-\sqrt{7}}{3}$; $z_2 - z_1 = \frac{-4+\sqrt{7}+4+\sqrt{7}}{3}$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+2\sqrt{7}}{6} = \frac{-4+\sqrt{7}}{3}$ $\quad = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$|z_1| > 1 \ ; \ |z_2| < 1 \ ; \ |z_1 z_2| = 1$

$$A = \lim_{z\to z_1} (z-z_1) f(z) = \frac{1}{3(z_1-z_2)}$$

$$B = \lim_{z\to z_2} (z-z_2) f(z) = \frac{1}{3(z_2-z_1)} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = Res(f, z_2)$$

وبالتالي $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\ldots} = \frac{2\pi}{\ldots}$