كليّة العلوم – قسم الرياضيات- الفصل الصيفي 1439-1440 هـ مقرّر 379 ريض – اسس الهندسة الإقليدية و اللاإقليدية اختبار النهائي – مدّة الاختبار: 3 ساعات	جامعة الملك سعود King Saud University

الجزء الأول الهندسة الإقليدية (10 درجات):

نعتبر في المستو الاقليدي $\mathcal{E}$, النقاط التالية: $A(1,1)$, $B(1,2)$, $C(2,1)$,

$D\left(\frac{1}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$, $E\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$ و $F\left(1,1+\sqrt{3}\right)$.

(1) بيَن أنَ المثلّثين ABC و DEF متطابقان و جد صيغة التقايس الذي يحوّل ABC إلى DEF و حدَد طبيعته وجد عناصره.

(2) عيَن نوع وحدّد عناصر التحويل المستوي $\mathcal{T}:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ المعرّف بـ

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&3\\3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

الجزء الثاني الهندسة الكروية (10درجات):

نعتبر في الكرة $\mathbb{S}^2$ النقاط التالية :

$\xi_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\xi_2\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$ و $\xi_3\left(\frac{2-2\sqrt{3}}{6},\frac{2+\sqrt{3}}{6},\frac{1+2\sqrt{3}}{6}\right)$ و ليكن التحويل $\varphi:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$

المعرَف بـ $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

(1) احسب أطوال أضلاع المثلّث الكروي $\xi_1\xi_2\xi_3$.

(2) أثبت أن مجموع زوايا المثلّث الكروي $\xi_1\xi_2\xi_3$ يساوي $\frac{4\pi}{3}$.

(3) بيّن أن التحويل φ هو تقايس كروي, عيّن طبيعته و حدّد عناصره.

الجزء الثالث الهندسة الزائدية (20درجة):

(1) نعتبرفي نصف المستوى الزائدي $\mathbb{H}^2=\{z\in\mathbb{C}/\Im m(z)>0\}$ المثلّث $z_1=i$, $z_2=1+i$ و $z_3=1+2i$.

(أ) ارسم أضلاع المثلث الزائدي $z_1z_2z_3$ و احسب طول أضلاعه و جد مساحته.

(ب) تأكد من تحقق قاعدة الجيوب الزائدية في المثلث الزائدي $z_1z_2z_3$.

(ج) ليكن $\omega_1=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$, $\omega_2=\frac{7}{10}+\frac{1}{10}i$ و $\omega_3=\frac{10}{13}+\frac{2}{13}i$, بيّن أن المثلّثين الزائدين $z_1z_2z_3$ و $\omega_1\omega_2\omega_3$ متطابقان.

(هـ) جد صيغة التقايس الزائدي $\psi:\mathbb{H}^2\to\mathbb{H}^2$ الذي يحوّل $z_1z_2z_3$ إلى $\omega_1\omega_2\omega_3$.

(2) نعتبر في السطح الزائدي $\mathbb{H}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2-z^2=-1,\ \ z>0\}$ المستقيم الزائدي $\ell:x+y-z=0$ و التحويل الزائدي $\phi:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&-5&4\\3&0&0\\0&-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

(أ) أعط صيغة الانعكاس الزائدي Ω_ℓ بالنسبة للمستقيم ℓ .

(ب) بيّن أن التحويل ϕ تقايس زائدي, عيّن طبيعته , وحدّد عناصره.

لا يكتب في
هذا الهامش

د. برهان

تصحيح الاختبار النهائي 379 ريض
للفصل الصيفي 39/1440هـ

الجزء الأول (الهندسة الاقليدية)

$$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2-1\\1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2-1\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1-1\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$ ①

$$\overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}1-\left(\frac{1-\sqrt3}{2}\right)\\1+\sqrt3-\left(\frac{3+\sqrt3}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt3}{2}\\\frac{-1+\sqrt3}{2}\end{pmatrix};\ \overrightarrow{DF}=\begin{pmatrix}1-\frac12\\1+\sqrt3-\left(\frac{2+\sqrt3}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\\frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix};\ \overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt3}{2}-\frac12\\\frac{3+\sqrt3}{2}-\frac{2+\sqrt3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt3/2\\\frac12\end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt2=\|\overrightarrow{EF}\|,\quad \|\overrightarrow{AC}\|=1=\|\overrightarrow{DF}\|,\quad \|\overrightarrow{AB}\|=1=\|\overrightarrow{DE}\|$$

② وبالتالي المثلثين ABC و DEF متطابقان

ليكن $\varphi:\mathcal{E}^2\to\mathcal{E}^2$ التقايس الذي يحول ABC الى DEF.

فان مصفوفة التقايس φ هي $A_\varphi=M_2M_1^{-1}$

حيث

$$M_2=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overrightarrow{DE} & \overrightarrow{DF}\end{array}\\\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{2} & 1/2\\1/2 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}e_1\\e_2\end{array},\qquad M_1=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC}\end{array}\\\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}e_1\\e_2\end{array}$$

$$|M_1|=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$$

$$M_1^{-1}=-\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}-\sqrt3/2 & 1/2\\\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2} & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\varphi(M(x,y))=M'(x',y')$$

② $$\varphi:\ \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2} & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_D\\y_D\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt3/2\\\sqrt3/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2\\\frac{2+\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt3/2\\\sqrt3/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}+1/2\\-\frac{\sqrt3}{2}-\frac12+\frac{2+\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$$

لا يكتب في هذا الهامش

$$\varphi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$\varphi(C) = F$, $\varphi(B) = E$, $\varphi(A) = D$

بما أن $|A_\varphi| = \begin{vmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 1$ فان التقايس φ

هو دوران و زاويته θ حيث

$$\begin{cases} \cos\theta = 1/2 \\ \sin\theta = \sqrt{3}/2 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

و مركزه Ω

$\varphi(\Omega) = \Omega$

2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y + \sqrt{3}/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y + 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x - \sqrt{3} y + \sqrt{3} \\ 2y = \sqrt{3} x + y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \sqrt{3} y = \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} x + y = 1 \end{cases}$$

كرامر

$$\begin{cases} x_\Omega = \dfrac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}} = 0 \\ y_\Omega = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}}{4} = 1 \end{cases}$$

$\Omega(0, 1)$

2

J (مصفوفة التحويل) $A_J = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$$A_J^T \cdot A_J = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

1

فان J هو تقايس على $\mathcal{E}^2$

Scanned by CamScanner

$$|A_J| = \frac{1}{25}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \frac{-25}{25} = -1$$

وبالتالي التحويل T هو انعكاس > إما حول محور
إمّا انزلاقي

1

ندرس النقاط الثابتة للتحويل T : $(T(M) = M)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

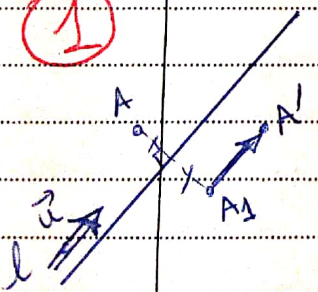
$$\begin{cases} x - 3y = 10 \\ -3x + 9y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 4x + 3y + 10 \\ 5y = 3x - 4y + 20 \end{cases}$$

اذن لا يوجد نقاط ثابتة لـ J $\quad \begin{cases} x - 3y = 10 \\ x - 3y = -\frac{20}{3} \end{cases}$ ⚡

يعني T هو انعكاس انزلاقي (تركيب انعكاس محوري وانسحاب)

1

$$T = t_{\vec u} \circ S_l$$



نضع $I = O*O'$ $\quad T(O(0,0)) = O'(2,4)$

$I(1,2) = (x_I, y_I)$

نضع $J = A*A'$ $\quad T(A(5,5)) = A'(9,3)$

$J = (7,4) = (x_J, y_J)$

$l = (IJ)$

معادلة l هي $\quad l : y - y_I = \dfrac{4-2}{7-1}(x - x_I)$

$\boxed{l : x - 3y + 5 = 0} \Leftarrow y - 2 = \frac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow 3y - 6 = x - 1$

1

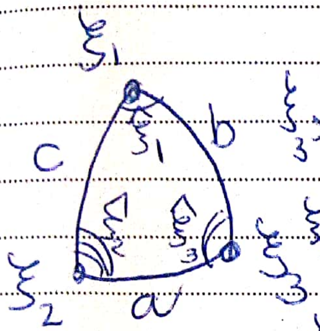
$$t_{2\vec u}(O) = T \circ T(O(0,0)) = T(2,4) = (6,2)$$

فإن $\vec u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} // l$

لا يكتب في هذا الهامش

الجزء الثاني: الهندسة الكروية

① نضع



$a = \widehat{\xi_2 \xi_3}$ طول الضلع بين ξ_2 و ξ_3

$b = \widehat{\xi_1 \xi_3}$ // // ξ_1 و ξ_3

$C = \widehat{\xi_1 \xi_2}$ // ξ_1 و ξ_2

$$a = \widehat{\xi_2 \xi_3} = \cos^{-1}(\langle \xi_2 | \xi_3 \rangle)$$

$$a = \cos^{-1}\left\langle \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{2-2\sqrt{3}}{6} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1+2\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \right\rangle = \cos^{-1}\left[\frac{2-\cancel{2\sqrt{3}}-4-\cancel{2\sqrt{3}}+2+\cancel{4\sqrt{3}}}{18}\right]$$

$\cos a = 0$
$\sin a = 1$

$$\boxed{a = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}}$$

1

$$b = \widehat{\xi_1 \xi_3} = \cos^{-1}(\langle \xi_1 | \xi_3 \rangle)$$

$$= \cos^{-1}\left\langle \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{2-2\sqrt{3}}{6} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1+2\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \right\rangle = \cos^{-1}\left[\frac{4-\cancel{4\sqrt{3}}+4+\cancel{2\sqrt{3}}+1+\cancel{2\sqrt{3}}}{18}\right]$$

$\cos b = 1/2$
$\sin b = \sqrt{3}/2$

$$\boxed{b = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}}$$

1

$$c = \widehat{\xi_1 \xi_2} = \cos^{-1}(\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle)$$

$$= \cos^{-1}\left\langle \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\rangle = \cos^{-1}\left[\frac{2-4+2}{9}\right]$$

$\cos c = 0$
$\sin c = 1$

$$\boxed{C = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}}$$

1

②

$$\cos \hat{\xi}_1 = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos \hat{\xi}_1 = \frac{0 - 0}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1} \Rightarrow \boxed{\hat{\xi}_1 = \frac{\pi}{2}}$$

1

لا يكتب في هذا الهامش

$$\cos \hat{\xi}_2 = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = \frac{1/2 - 0}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

1

$$\boxed{\hat{\xi}_2 = \frac{\pi}{3}}$$

$$\cos \hat{\xi}_3 = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{0-0}{1 \cdot \sqrt{3}/2} = 0$$

1

$$\boxed{\hat{\xi}_3 = \frac{\pi}{2}}$$

وبالتالي مجموع زوايا المثلث الكروي $\xi_1\xi_2\xi_3$ يساوي

$$\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2 + \hat{\xi}_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}$$

3

$$A_\varphi = \frac{1}{3}\begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_\varphi^T \cdot A_\varphi = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

وبالتالي التحويل φ هو تقايس كروي

$$\vec{u} \times \vec{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 2+4 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{w}$$

وبالتالي φ هو <u>دوران</u> (أيضا $|A_\varphi| = 1$)

1

زاوية θ ; لدينا $2\cos\theta + 1 = tr A_\varphi$

$$2\cos\theta + 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}(1/3)}$$

لا يكتب في هذا الهامش

ومركزه $\Omega = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

محور الدوران

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x = 2x + 2y + z \\ 3y = -2x + y + 2z \\ 3z = x - 2y + 2z \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ \cancel{x - 2y - z = 0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$(x = z, y = 0, z) \in S^2$

$z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftarrow z^2 = \frac{1}{2} \Leftarrow z^2 + z^2 = 1$

إشارتها .

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \perp \underset{\Omega}{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} ; \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 \\ -1+1 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

متعامد لـ Ω

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

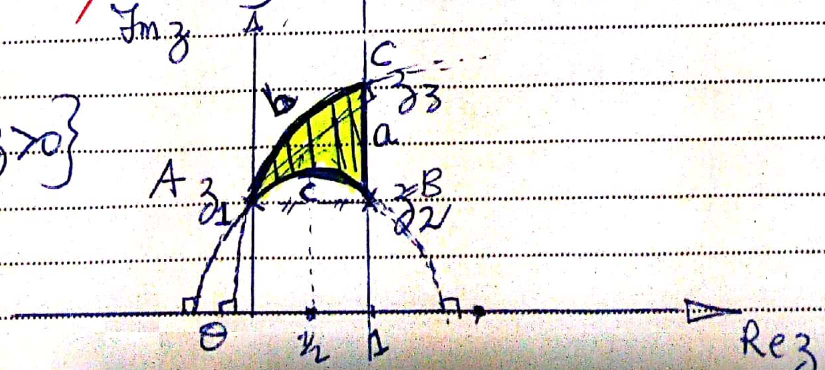
سالبة

(20 درجة) الجزء الثالث الهندسة الزائدية

1.

أ -

$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z > 0\}$



لا يكتب في هذا الهامش

نضع $a = \overline{z_2 z_3}$ طول الضلع الزائدي الذي يربط z_2 و z_3

$b = \overline{z_1 z_3}$ // // يربط z_1 و z_3

$c = \overline{z_1 z_2}$ // // يربط z_1 و z_2

$d_{H^2}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{2y_1y_2}\right)$

$z_3 = (1,2)$, $z_2 = (1,1)$, $z_1 = (0,1)$

$$a = d_{H^2}(z_2, z_3) = d_{H^2}((1,1);(1,2)) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{0^2+1^2}{2\times1\times2}\right)$$

1 $\quad a = \cosh^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$

$\cosh a = \frac{5}{4}$

$\sinh a = \sqrt{\cosh^2 a - 1} = \frac{3}{4}$

$$b = d_{H^2}(z_1, z_3) = d_{H^2}((0,1);(1,2)) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{1^2+1^2}{2\times1\times2}\right)$$

$b = \cosh^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

$\cosh b = 3/2$

$\sinh b = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{5}/2$

1 $$c = d_{H^2}(z_1, z_2) = d_{H^2}((0,1);(1,1)) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{1^2+0^2}{2\times1\times1}\right)$$

1 $\quad c = \cosh^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

$\cosh c = 3/2$

$\sinh c = \sqrt{5}/2$

مساحة المثلث الزائدي $(z_1 z_2 z_3)$ هي $\pi - (\hat{z}_1 + \hat{z}_2 + \hat{z}_3)$

$\pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$

$$\cos \hat{z}_1 = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c} = \frac{3/2 \times 3/2 - \frac{5}{4}}{\frac{\sqrt5}{2} \cdot \frac{\sqrt5}{2}}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{4}{5} \Rightarrow \hat{A} = \cos^{-1}(4/5)$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\cosh a \cosh c - \cosh b}{\sinh a \sinh c} = \frac{5/4 \cdot 3/2 - 3/2}{3/4 \cdot \sqrt5/2}$$

2

$$\cos \hat{B} = \frac{15-12}{3\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{5}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt5}{5}\right)$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b} = \frac{\frac{5}{4} \cdot 3/2 - 3/2}{\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt5}{2}}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt5}{5}\right)$$

لا يكتب في هذا الهامش

وبالتالي فإن مساحته $\pi - \left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + 2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right)$

$\approx 16{,}26^{\circ} \approx 0{,}09\pi$

(ب)

$$\frac{\sinh a}{\sin \hat{A}} = \frac{3/4}{3/5} = \frac{5}{4}$$

$\cos\hat{A} = 4/5$

$\sin\hat{A} = 3/5$

$$\frac{\sinh b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sqrt{5}/2}{2/\sqrt{5}} = \frac{5}{4}$$

$\cos\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\hat{B} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\frac{\sinh c}{\sin \hat{C}} = \frac{\sqrt{5}/2}{2/\sqrt{5}} = \frac{5}{4}$$

2

وبالتالي

$$\frac{\sinh a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sinh b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sinh c}{\sin \hat{C}}$$

قاعدة الجيوب تتحقق

(ج)

- $d_{\mathbb{H}^2}(\omega_1, \omega_2) = d_{\mathbb{H}^2}\left(\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right); \left(\frac{7}{10}, \frac{1}{10}\right)\right)$

$$= \cosh^{-1}\left(1 + \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(-\frac{1}{10}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}}\right)$$

$$= \cosh^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2)$$

3

- $d_{\mathbb{H}^2}(\omega_1, \omega_3) = d_{\mathbb{H}^2}\left(\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right); \left(\frac{10}{13}, \frac{2}{13}\right)\right)$

$$= \cosh^{-1}\left(1 + \frac{\left(\frac{10}{13} - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{13} - \frac{1}{5}\right)^2}{2 \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{13}}\right)$$

$$= \cosh^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_3)$$

- $d_{\mathbb{H}^2}(\omega_2, \omega_3) = d_{\mathbb{H}^2}\left(\left(\frac{7}{10}, \frac{1}{10}\right); \left(\frac{10}{13}, \frac{2}{13}\right)\right)$

$$= \cosh^{-1}\left(1 + \frac{\left(\frac{10}{13} - \frac{7}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{13} - \frac{1}{10}\right)^2}{2 \times \frac{1}{10} \times \frac{2}{13}}\right)$$

$$= \cosh^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = d_{\mathbb{H}^2}(z_2, z_3)$$

لا يكتب في
هذا الهامش

فنستنتج أن المثلثين $z_1z_2z_3$ و $\omega_1\omega_2\omega_3$ متطابقان

(b) نضع $\omega = \varphi(z)$ التقايس الذي يحول $z_1z_2z_3$ إلى $\omega_1\omega_2\omega_3$ فإن

$$\left(\frac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_3}\right)\left(\frac{\omega_2-\omega_3}{\omega_2-\omega_1}\right) = \left(\frac{z-z_1}{z-z_3}\right)\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\right)$$

فنجد بعد التعويض أن

$$\omega = \varphi(z) = \frac{z+1}{z+2}$$

+2

check

$$\varphi(z_1) = \frac{i+1}{i+2} = \frac{(i+1)(2-i)}{5} = \frac{3+i}{5} = \omega_1$$

$$\varphi(z_2) = \frac{2+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3-i)}{10} = \frac{7}{10} + \frac{i}{10} = \omega_2$$

$$\varphi(z_3) = \frac{2+2i}{3+2i} = \frac{(2+2i)(3-2i)}{13} = \frac{10}{13} + \frac{2}{13}i = \omega_3$$

2) (أ) $l : x+y-z=0$ مستقيم زاوي ذات قطب $\xi(1,1,1)$

$\|\xi\| = 1$ ليكن Ω_l الانعكاس الزاوي

$X \in H$, $\Omega_l(X) = X' \Leftrightarrow X' = X - 2b(X,\xi)\xi$

$$b(X,\xi) = b\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = x+y-z$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - 2(x+y-z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-2x-2y+2z\\y-2x-2y+2z\\z-2x-2y+2z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x-2y+2z\\-2x-y+2z\\-2x-2y+3z\end{pmatrix}$$

$$\Omega_l : \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-1&2\\-2&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} ; X \in H$$

Scanned by CamScanner

(ب)

مصفوفة التحويل الزائدي $A_\phi = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$$A_\phi^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} A_\phi = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

1

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي ϕ هو تقايس زائدي.

بما أن

$$|A_\phi| = \frac{1}{27}(-3)\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

1

فان ϕ هو دوران

زاويته θ تساوي $\cos^{-1}(1/3)$

$$2\cos\theta + 1 = tr\, A_\phi = \frac{5}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$$

مركزه $Q = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) \in \mathbb{H}$

1

محور الدوران:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = y \\ z = 2x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y - 4z = 0 \\ y = x \\ -4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -5y + 4z \\ 3y = 3x \\ 3z = -4y + 5z \end{cases}$$

2

$$(y, y, 2y) \in \mathbb{H} \qquad y^2 + y^2 - 4y^2 = -1$$

$$-2y^2 = -1$$

$$y = \pm\sqrt{1/2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \perp_h \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

إشارة

$$\phi\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} ; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \times_h \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner