بوم الإثنين 1439/8/28 هـ الزمن : ثلاث ساعات	الإمتحان النهائي 209 ريض الفصل الثاني 1439/1438 هـ,	جامعة الملك سعود- كلية العلوم قسم الرياضيات.

السؤال الأول (5) : أ) اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية :

$$\left\{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2}{n+1}\right\}_{n=2}^{\infty} \quad ، \quad \left\{n\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ، \quad \left\{(-1)^n\frac{2n+3}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty} .$$

ب) برهن أن المتسلسلة التالية : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n+2}-\frac{5}{n+3}\right)$ متقاربة وما هو مجموعها؟.

السؤال الثانى(6) : أ) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+4} \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2^n}\right) \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\,3^{2n}}{n^n} .$$

ب) أوجد فترة ونصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى في x : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2+n^2}$

السؤال الثالث (8) : أ) باستخدام متسلسلة القوى $e^u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$ لكل $u\in\mathbb{R}$ احسب قيمة

النهاية التالية : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$.

ب) أوجد متسلسلة فورييه للدالة التالية : $f(x)=\begin{cases}0\,; & -1<x\le 0\\ x^2\,; & 0<x<1\end{cases}$ ، حيث

$f(x+2)=f(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$. استنتج عند $x=0$ صحة العلاقة التالية :

$$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} .$$

السؤال الرابع (6): أ) ارسم الدالة التالية :

$$f(x)=\begin{cases}1\,; -1\le x<0\\ -2\,; 0\le x\le 1\\ 0\,;\ x>1 \text{ أو } x<-1\end{cases}$$

ب) أوجد تكامل فورييه للدالة f .

ج) استنتج عند $x=0$ صحة العلاقة التالية : $\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}$.

السؤال الخامس (15) : أ) برهن أن الدالة التالية : $f(x,y)=xy\sin(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})$ ، حيث $x\neq 0, y\neq 0$ تحقق المعادلة التالية : $x^2\frac{\partial f}{\partial x}+y^2\frac{\partial f}{\partial y}=(x+y)f$.

ب) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية : $y^2dy=x(xdy-ydx)e^{x/y}$.

ج) برهن أن المعادلة التفاضلية التالية تامة ثم أوجد حلها :

$$(2x^3-xy^2-2y+3)dx-(x^2y+2x)dy=0 .$$

د) أوجد حل المسألة التفاضلية التالية : $\begin{cases}x^2y'+x(x+1)y=e^{-x}\\ y(1)=1\end{cases}$ ، حيث $x>0$.

تصحيح الاختبار النهائي ٢٠٩ ريض للفصل الثاني ١٤٣٨/١٤٣٩هـ

السؤال الأول (5 درجات)

أ) 1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n^2-n^3+n^2}{n^2-1}\right)$

(1) $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2-1}\right)=2$

متقاربة للعدد 2 .

2) $f(x)=x\tan(\frac{1}{x})=\frac{\tan(1/x)}{1/x}$

(1) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{(-1/x^2)\sec^2(1/x)}{(-1/x^2)}=\lim_{x\to\infty}\sec^2(1/x)=1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\tan(1/n)=1$

متقاربة للعدد 1

3) (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+2}=2\neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{n+2}$ غير موجودة

$\sum(-1)^n\frac{2n+3}{n+2}$ متباعدة

ب) $a_n=\left(\frac{5}{n+2}-\frac{5}{n+3}\right)$

$S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$

(2) $=5\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$

$=5\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right]\to\frac{5}{3}$

إذاً $\sum\left(\frac{5}{n+2}-\frac{5}{n+3}\right)=\frac{5}{3}$ متقاربة

السؤال الثاني: (6 درجات)

أ) 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+4}\approx\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ (1)

$\lim\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+4}=1>0$

بما أن $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ متقاربة ؛ $p=\frac{3}{2}>1$ $\Rightarrow$ $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+4}$ متقاربة

2) بما أن $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة $(p=1)$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متقاربة (هندسية $|r|=\frac{1}{2}<1$)

إذاً $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ متباعدة

Scanned by CamScanner

3) $u_n = (-1)^n \frac{n\, 3^{2n}}{n^n}$ ، $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}\, 3^2}{n}$

(1)

$= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n} \cdot n^{1/n} = 0(1) = 0 < 1$

حيث $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ ، اذاً المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n\, 3^{2n}}{n^n}$ متقاربة

مطلقاً بالتالي متقاربة ، حسب اختبار الجذر

ب) عند $x=0$ يوجد تقارب ، نفرض ان $x \neq 0$ نستخدم اختبار النسبة

$u_n = \frac{x^n}{2+n^2}$ ،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{2+(n+1)^2}}{\frac{|x|^n}{2+n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+n^2}{2+(n+1)^2} |x| = |x|$$

(2)

اذاً المتسلسلة متقاربة لكل x تحقق $|x|<1 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$

عندما $x=1$ لدينا $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} < \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$ متقاربة (1)

عندما $x=-1$ لدينا $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$ متقاربة ، حسب اختبار التناوب (1)

اذاً منطقة التقارب هي $I = [-1,1]$ ، نصف قطر التقارب هو $(r=1)$

السؤال الثالث : (8 درجات)

أ) لدينا

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

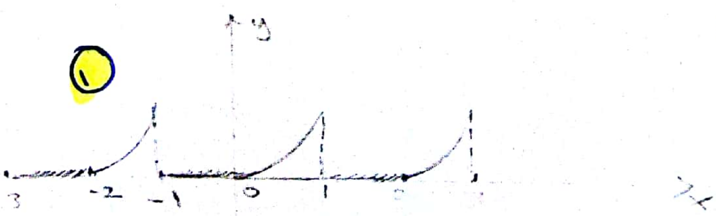
$$x \neq 0 \quad \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} \cdots$$

(2) ومنه

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots \right] = \frac{1}{2}$$

ب)

$(-1,1)$ ، $T=1$ (1)



(1) $a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} f(x) \cos(n\pi x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x)\,dx$$

$$a_n = \left[\frac{x^2 \sin n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}(2x\,dx)$$

$$= 0 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x \sin(n\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx\right\}$$

$$= \frac{+2}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi)\right] - \frac{2}{n^3\pi^3}\underbrace{\left[\sin n\pi x\right]_0^1}_{0}$$

$1\frac{1}{2}$

$$\boxed{a_n = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}}$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,dx = \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^2\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}(2x\,dx)$$

$$= \frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\left(\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{\pi n}\left\{\underbrace{\left(\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\right)_0^1}_{0} - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\,dx\right\}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}\left[\cos(n\pi x)\right]_0^1 =$$

$1\frac{1}{2}$

$$\boxed{b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{\pi^3 n^3}\left[(-1)^n - 1\right]}$$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{6} + \sum_1^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) + \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right)\right]\sin n\pi x$$

لكل $-1 < x < 1$

نعوض لما $x = 0$

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0 = \frac{1}{6} + \sum_1^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$\frac{1}{6} = -2\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} = \frac{2}{\pi^2}\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

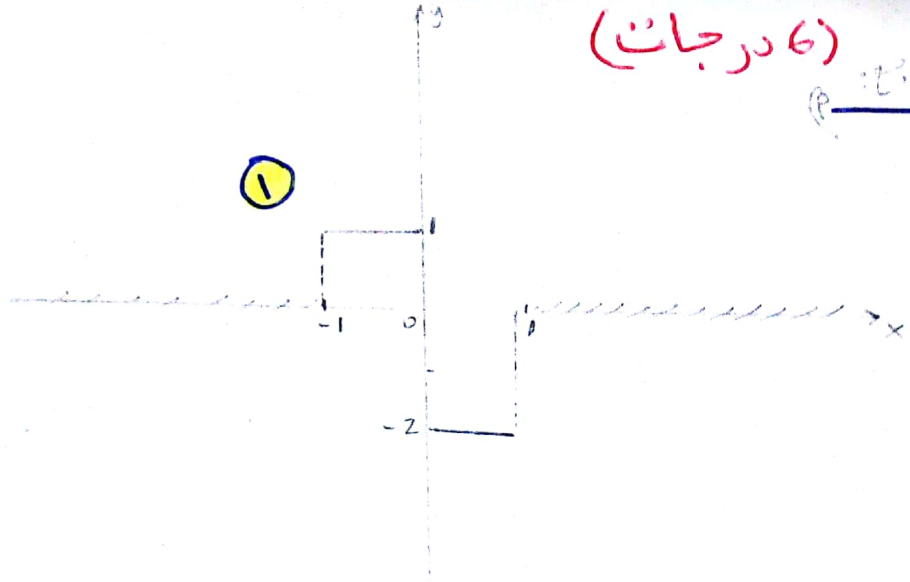
اذا

1

$$\boxed{\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

(6 درجات)

السؤال الرابع:



1

$\alpha > 0$ $$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx = \int_{-1}^{0}(1)\cos(\alpha x) + \int_{0}^{1}(-2)\cos(\alpha x)\,dx$$

2

$$= \left[+\frac{\sin \alpha x}{\alpha}\right]_{-1}^{0} - 2\left[\frac{\sin \alpha x}{\alpha}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{\alpha}(0 - \sin(-\alpha)) - \frac{2}{\alpha}(\sin\alpha - 0)$$

$$= \frac{1}{\alpha}(-1)(-\sin\alpha) - \frac{2}{\alpha}\sin\alpha = \left(-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = \int_{-1}^{0}(1)\sin\alpha x\,dx + \int_{0}^{1}(-2)\sin\alpha x\,dx$$

2

$$= \left[-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right]_{-1}^{0} + 2\left[\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{-1+\cos(-\alpha)}{\alpha} + 2\left(\frac{\cos\alpha - 1}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{-1+\cos(\alpha)+2\cos\alpha-2}{\alpha} = \frac{3(\cos\alpha-1)}{\alpha}$$

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\sin(\alpha x)]\,d\alpha$$

$$\boxed{= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos(\alpha x) + \frac{3(\cos\alpha-1)}{\alpha}\sin\alpha x\right]d\alpha}\quad, x\in\mathbb{R}$$

1

(ب) عند $x=0$ نجد

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

$$\boxed{\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

السؤال الخامس : (15 درجة)

أ

$f(x,y) = xy\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right), \quad x\neq 0, \; y\neq 0$

1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) + (xy)\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = y\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) - \frac{y}{x}\cos\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$$

1

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) + (xy)\left(\frac{1}{y^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = xy\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y}\cos\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$$

1

$$x^2 f_x + y^2 f_y = x^2 y\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) - \cancel{xy\cos\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)} + y^2 x\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) + \cancel{xy\cos\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$$

$$= xy(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) = (x+y)f(x,y)$$

محقق

$$x^2 f_x + y^2 f_y = (x+y)f$$

ب

$y\neq 0 \qquad y^2\,dy = x(x\,dy - y\,dx)\,e^{x/y}$

معادلة متجانسة نقسم على y^2 ، $\frac{x}{y}=z$ ، نفرض

2

$$dy = \left(\frac{x^2}{y^2}dy - \frac{x}{y}dx\right)e^{x/y}$$

نعوض $\frac{x}{y}=u \Leftarrow$

$dx = u\,dy + y\,du \qquad , \; x = u\cdot y$

$$dy = [u^2 dy - u(u\,dy + y\,du)]e^u$$

$$= (\cancel{u^2 dy} - \cancel{u^2 dy} - uy\,du)e^u$$

$$= -uy\,e^u\,du$$

2

$$\frac{dy}{y} + ue^u\,du = 0 \Rightarrow \ln|y| + (ue^u - e^u) = c$$

حيث c ثابت التكامل

$$\boxed{\ln|y| + e^{x/y}\left(\frac{x}{y}-1\right) = c}$$

$$(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)\,dx - (x^2y + 2x)\,dy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy - 2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy - 2$$

بما أن المعادلة تامة، فإنه توجد دالة f في x, y بحيث

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = -x^2y - 2x$$

$$f(x,y) = \int (-x^2y - 2x)\,dy = -\frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy + \phi(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 - 2y + \phi'(x) = M = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3$$

$$\phi'(x) = 2x^3 + 3$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x + c$$

اذن يكون الحل العام هو

$$\boxed{f(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^4 + 3x + c = 0}$$

$$\begin{cases} x^2y' + x(x+1)\,y = e^{-x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

لدينا معادلة خطية

$$y' + \left(\frac{x+1}{x}\right)y = \frac{1}{x^2}e^{-x}$$

$$y' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = \frac{1}{x^2}e^{-x}$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int (1+\frac{1}{x})\,dx} = e^{x + \ln x} = xe^{x}$$

اذن الحل العام للمعادلة هو

$$\mu(x)\,y = xe^{x}y = \int \mu(x)\frac{1}{x^2}e^{-x}\,dx$$

$$= \int xe^{x}\cdot\frac{1}{x^2}e^{-x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$xe^{x}y = \ln x + c$$

أو

$$y = \frac{\ln x}{x}e^{-x} + \frac{c}{x}e^{-x}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow 1 = 0 + e^{-1}c = \frac{1}{e}c \Rightarrow c = e$$

$$\boxed{y = \frac{\ln x}{x}e^{-x} + \frac{1}{x}e^{1-x}}$$