اختبار النهائي 209 ريض للفصل الدراسي الأول 1440- 1441 هـ	كلية العلوم - قسم الرياضيات	جامعة الملك سعود King Saud University

السؤال الأول : (12 درجات)

(أ)اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية:

$$\left\{n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{1-\cos(2n)}{\sqrt{n}+1}\right\}_{n=0}^{\infty}, \quad \left\{\sin\left(\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$ (استخدم المتطابقة

$(\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

(ب) برهن أن المتسلسلة التالية متقاربة و ماهو مجموعها.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)+\frac{3^n}{7^{n-2}}\right]$$

(ج) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^4}{5^n-3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(3+(-1)^n\right)^{-n}$$

السؤال الثاني: (6 درجات)

(أ) جد متسلسلة ماكلورين للدالة $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ثم احسب قيمة تقريبية للتكامل $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{\sinh x}{x}\,dx$.

(ب) جد متسلسلة تايلور للدالة $f(x)=\dfrac{1}{x}$ عند النقطة $x=2$.

السؤال الثالث: (4 درجات)

لتكن $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

(1) أوجد تكامل فورية للدالة f على $\mathbb{R}$.

(2) استنتج من تكامل فورية عندما $x=1$ صحة العلاقة $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha=\frac{\pi}{2}$.

خلف الورقة

السؤال الرابع: (18درجة)

(1) لتكن $f(x,y)=xy+x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ فاحسب $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}-xy-f$.

(2) أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

(أ) $2x\left(y^2+y\right)dx+\left(x^2-1\right)y\,dy=0, \quad y\neq 0$.

(ب) $y\,dx+x\left(\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)-1\right)dy=0$, لكل $x>0$ و $y>0$.

(ج) $y^3dx+\left(3y^2+3xy^2-y^3\right)dy=0$.

(د) $x\,y'=2x^2e^x+y+6x^3$

(هـ) $y'+\dfrac{2x}{3(x^2+1)}y=\dfrac{2x}{3\left(x^2+1\right)}y^4$

د/ برهان

تصحيح الاختبار النهائي 209 ريض للفصل الأول

1440 / 1441 هـ

السؤال الأول: (12 درجة)

(أ) •

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \infty . 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(1/n)}{1/n^2} = \frac{0}{0}$$

نضع $t=\frac{1}{n}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{0}{0}$$

قاعدة لوبيتال

$$\stackrel{=}{} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{2} = \frac{1}{2}$$

1

•

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(2n)}{\sqrt{n}+1}$$

نظرية الحصر:

$$-1 \le \cos(2n) \le 1$$

$$-1 \le -\cos 2n \le 1$$

$$0 \le \frac{1-\cos 2n}{\sqrt{n}+1} \le \frac{2}{\sqrt{n}+1}$$

بما أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}+1} = 0$$

فإن

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(2n)}{\sqrt{n}+1} = 0$$

1

•

$$\sin\left(\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi\right) = \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}\cos\frac{\pi}{n} + \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| = 0$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi\right) = 0$$

1

(ب) نأخذ $N \geq 2$ نضع

$$S_N = \sum_{n=2}^{N}\left[\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) + \frac{3^n}{7^{n-2}}\right]$$

2

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) + \sum_{n=2}^{N} \frac{3^n}{7^{n-2}}$$

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \left[\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right] + 9 \sum_{n=2}^{N} \frac{3^{n-2}}{7^{n-2}}$$

$$= \left[\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \cancel{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}\right) + \left(\cancel{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} - \cancel{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}\right) + \cdots + \left(\cancel{\ln\frac{N}{N+1}} - \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right)\right)\right]$$

2

$$+ 9 \sum_{l=0}^{N-2} \left(\frac{3}{7}\right)^l .$$

$$S_N = \left[\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right)\right] + 9 \, \frac{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^{N-1}}{1 - \frac{3}{7}}$$

بما أن $\lim_{N \to +\infty} \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) = \ln 1 = 0$

$\lim_{N \to +\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^{N-1} = 0$ (متتالية هندسية $-1 < \frac{3}{7} < 1$)

فإن $\lim_{N \to \infty} S_N = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{9}{1 - 3/7}$

وبالتالي $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) + \frac{3^n}{7^{n-2}}\right]$ متقاربة

1

ومجموعها يساوي $\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{63}{4}\right)$.

(ج) . $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n$ متسلسلة موجبة

نستخدم اختبار الجذر

1,5

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

فهي متقاربة.

. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ متسلسلة موجبة . نستخدم اختبار النسبة

لكل $n \geq 1$ $\quad a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \, \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$$

بما أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} < 1$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ متقاربة

1,5

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}$ متسلسلة موجبة

نستخدم اختبار نهاية المقارنة مع

$b_n = \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ ($\sum b_n$ متسلسلة هندسية متقاربة $-1 < r = 3/5 < 1$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}\right)\left(\frac{5^n}{3^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}\left[1 + \frac{n^4}{3^n}\right]}{\cancel{5^n}\left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]} \cdot \frac{\cancel{5^n}}{\cancel{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + n^4/3^n}{1 - (3/5)^n} = 1$$

لأن $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{3^n} = 0$

وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}\right)$ متقاربة.

1,5

- $\sum_{n} \left(3 + (-1)^n\right)^{-n}$ متسلسلة موجبة نستخدم اختبار المقارنة

$\left(3 + (-1)^n\right)^{-n} \le \frac{1}{2^n}$ لكل $n \geq 0$

وبما أن $\sum \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ متقاربة هندسية

فإن $\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^{-n}$ متقاربة.

1,5

السؤال الثاني: (6 درجات)

(أ) نعلم أن $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \cdots$ لكل $u \in \mathbb{R}$

فان

لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad e^{x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

عندئذٍ

$$e^{x} - e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n!} x^n$$

$$e^{x} - e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

2

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

متسلسلة متقاربة على $\mathbb{R}$ باستخدام اختبار النسبة

لكل $x\in\mathbb{R}$ $\quad \sinh x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots$

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\sinh x}{x}\,dx \approx \int_{1/2}^{1} \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{x}\,dx$$

$$\approx \int_{1/2}^{1} \left[1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right] dx$$

1

$$\approx \left[x + \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right]_{1/2}^{1}$$

$$\approx \left(1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{600}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8\times 18} + \frac{1}{32\times 600}\right)$$

(ب) f دالة قابلة للاشتقاق عدة مرات عند النقطة $x=2$

لكل x في جوار 2 $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = f(2) + f'(2)(x-2) + \cdots$

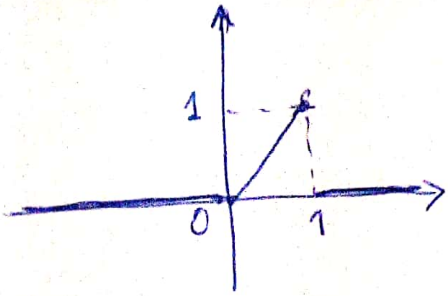
(مفكوك تايلور)

3

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x-2+2} = \frac{1}{2\left[1+\frac{x-2}{2}\right]} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{(x-2)}{2}\right]^n$$

لكل x في جوار 2 $\quad f(x) = \dfrac{1}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$ و $f^{(n)}(2) = \dfrac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$ لكل n

ج: السؤال الثالث (4 درجات)



1 f معرفة على $\mathbb{R}$ متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

فإن تكامل فورية لـ f هو

$$x \neq 1 ; \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\sin(\alpha x)\right]d\alpha$$

حيث

1 $$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx.$$

$$A(\alpha) = \int_0^1 x\cos(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\left[x\sin(\alpha x)\right]_0^1 - \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \sin(\alpha x)\,dx$$

$$u(x) = x \qquad\qquad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = \cos(\alpha x) \quad \Rightarrow \quad v(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$$

1 $$\bullet\ A(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\left[\cos(\alpha x)\right]_0^1 = \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}$$

$$B(\alpha) = \int_0^1 x\sin(\alpha x)\,dx = -\frac{1}{\alpha}\left[x\cos(\alpha x)\right]_0^1 + \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \cos(\alpha x)\,dx$$

$$u(x) = x \qquad\qquad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = \sin(\alpha x) \quad \Rightarrow \quad v(x) = -\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}$$

$$\bullet\ B(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\left[\cos\alpha - 0\right] + \frac{1}{\alpha^2}\left[\sin(\alpha x)\right]_0^1 = -\frac{\cos\alpha}{\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\alpha^2}$$

1

لذا $0 \leq x < 1$;

$$x = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\right)\cos\alpha x + \left[\frac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha}{\alpha}\right]\sin\alpha x\right]d\alpha$$

2 f غير متصلة عند ما $x=1$;

$$\frac{1}{2} = \frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\right)\cos\alpha + \left[\frac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha}{\alpha}\right]\sin\alpha\right]d\alpha$$

1 $$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty}\frac{\cos^2\alpha - \cos\alpha + \sin^2\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty}\frac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha$$

السؤال الرابع: (18 درجة)

$$y \neq 0, \quad f(x,y) = xy + x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad (1)$$

(1)

$$\bullet \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\bullet \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \frac{x^2}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = xy + x\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \cancel{\frac{x^2}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)} + xy + \cancel{\frac{x^2}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$$= 2xy + x\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= xy + \underbrace{xy + x\cos\left(\frac{x}{y}\right)}$$

(1)

$$= xy + f(x,y)$$

عند ئذ

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - xy - f = 0$$

(2) (أ)

$$y \neq 0 \quad ; \quad 2x(y^2+y)\,dx + (x^2-1)\,y\,dy = 0$$

$$2x(y^2+y)\,dx = (1-x^2)\,y\,dy$$

معادلة تفاضلية

X's متحولاتها منفصلة

(1)

$$\frac{2x}{1-x^2}\,dx = \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}(y+1)}\,dy$$

$$\int \frac{2x}{1-x^2}\,dx = \int \frac{dy}{y+1}$$

$$-\ln(1-x^2) = \ln|1+y| + c$$

$$\ln|1+y| = \ln\left[\frac{A}{1-x^2}\right]$$

(2)

الحل العام هو:

$$\boxed{y = \frac{A}{1-x^2} - 1}$$

$x>0$; $y>0$; $y\,dx + x\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)-1\right)dy = 0 \quad (*)$ (ب (7

$$x\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)-1\right)dy = -y\,dx$$

1
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)-1\right)} = f(x,y)$$

نضع $y = ux$ فإن

$$f(x,ux) = \frac{-u\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\ln\left(\frac{\cancel{x}}{u\cancel{x}}\right)-1\right)} = \frac{-u}{-\ln u - 1} = \frac{u}{1+\ln u} = F(u)$$

فإن $(*)$ متجانسة.

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = F(u)$$

$$F(u) - u = x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{F(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{du}{\frac{u}{1+\ln u} - u} = \frac{dx}{x} = \frac{1+\ln u}{-u\ln u}\,du$$

2
$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{1+\ln u}{u\ln u}\,du$$

$$\ln|x| = -\ln|u\ln u| + c$$

$$\ln x = \ln\left(\frac{A}{u\ln u}\right)$$

فإن الحل العام لـ $(*)$ هو :

$$\frac{A}{\left(\frac{y}{x}\right)\ln\left(\frac{y}{x}\right)} = x \iff \boxed{y\ln\left(\frac{y}{x}\right) = A}$$

8

(ج) $y^3\,dx+(3y^2+3xy^2-y^3)dy=0$ (*) نكتب على الشكل

$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ حيث

$M(x,y)=y^3$ كثيرات حدود.

$N(x,y)=3y^2+3xy^2-y^3$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3y^2\,;\ \frac{\partial N}{\partial x}=3y^2$$

بما أن $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ فإن (*) هي معادلة تفاضلية تامة.

1

وإذن يوجد دالة $F(x,y)$ بحيث $dF(x,y)=M\,dx+N\,dy$

وبالتالي

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=M(x,y)=y^3 & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=N(x,y)=3y^2+3xy^2-y^3 & (2)\end{cases}$$

بتكامل المعادلة (2) بالنسبة لـ y، نجد أن

$$F(x,y)=\int(3y^2+3xy^2-y^3)\,dy$$

$$F(x,y)=y^3+xy^3-\frac{y^4}{4}+\varphi(x)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x،

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=y^3+\varphi'(x)$$ بالمقارنة مع (1)

فإن $\varphi'(x)=0$ وبالتالي $\varphi=cst$.

2

الحل العام لـ (*) هو $F(x,y)=c$ $(\Rightarrow)$

$$\boxed{4y^3+4xy^3-y^4=c}$$

(د) $xy'=2x^2e^x+y+6x^3$

1

$xy'-y=2x^2e^x+6x^3$

$$\boxed{y'-\frac{1}{x}y=2xe^x+6x^2}$$ هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

$P(x)=-1/x$; $Q(x)=2xe^x+6x^2$

9

العامل التكميلي هو $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

فان الحل العام هو:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(t)\, q(t)\, dt$$

$$= x \int \frac{1}{t}(2t e^{t} + 6t^{2})\, dt$$

$$= x \int (2 e^{t} + 6t)\, dt$$

2

$$= x\left[2e^{x} + 3x^{2} + c\right]$$

$$y = \underbrace{cx}_{y_c} + \underbrace{2xe^{x} + 3x^{3}}_{y_p}$$

(b)

هي معادلة برنولي $n=4$ 1

$$y' + \frac{2x}{3(x^2+1)} y = \frac{2x}{3(x^2+1)} y^4 \quad (*)$$

نضع $z = y^{1-4} = y^{-3}$

$$z' = -3y^{-4} y'$$

$$y' y^{-4} + \frac{2x}{3(x^2+1)} y^{-3} = \frac{2x}{3(x^2+1)}$$

$$-\frac{1}{3} z' + \frac{2x}{3(x^2+1)} z = \frac{2x}{3(x^2+1)}$$

معادلة تفاضلية خطية

$$\boxed{z' - \frac{2x}{1+x^2} z = -\frac{2x}{1+x^2}} \quad (**)$$

$$p(x) = -\frac{2x}{1+x^2} \quad ; \quad q(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$$

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$ العامل التكميلي

فإن الحل العام لـ (**) هو

$$z(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(t)\, Q(t)\, dt$$

$$= (1+x^2) \int \left(\frac{1}{1+t^2}\right)\left(\frac{-2t}{1+t^2}\right) dt$$

2

$$= (1+x^2) \int -\underbrace{(2t)}_{du}\,(\underbrace{1+t^2}_{u})^{-2}\, dt$$

$$= (1+x^2)\left[\frac{1}{1+x^2} + cst\right]$$

$$z(x) = 1 + c(1+x^2) = \frac{1}{y^3}$$

و بالتالي الحل العام لـ (*) هو.

1

$$y(x) = \left(\frac{1}{1+c(1+x^2)}\right)^{1/3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$