جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم - قسم الرياضيات	اختبار النهائي 209 ريض للفصل الدراسي الأول 1439- 1440 هـ

السؤال الأول : (9 درجات)

(أ)اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية:

$$\left\{(-1)^n \frac{e^{-n}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{1-\sin(2n)}{\sqrt{n}+1}\right\}_{n=0}^{\infty}, \quad \left\{\sqrt{n^2+n}-n\right\}_{n=0}^{\infty}$$

(ب) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{10^n}$$

السؤال الثاني: (6 درجات)

(أ) جد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)=\ln(1+x^2)$.

(ب) إذا علمت أن لكل $u \in \mathbb{R}$, $\sin u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n+1}$. فجد $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)-x^3}{x^9}$ وقيمة تقريبية لـ $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$.

السؤال الثالث: (8 درجات)

(1) لتكن $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$ دالة دورية $f(x+2\pi)=f(x)$.

(أ) ارسم الدالة f.

(ب) جد متسلسلة فورية (Fourier series) للدالة f على الفترة $[-\pi,\pi]$.

(ج) استنتج من (ب) أن: $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)}{(2n-1)}$.

خلف الورقة

(2) أوجد تكامل الجيب التمام فورية (Fourier cosine integral) للدالة $f(x)=e^{-x}$ على الفترة $(0,+\infty)$ ثم استنتج

قيمة التكامل المعتل : $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha$.

<u>السؤال الرابع: (17 درجة)</u>

(1) لتكن $f(x,y)=\sin\left(x^3-y^3\right)$ فاحسب $3y^2\frac{\partial f}{\partial x}+3x^2\frac{\partial f}{\partial y}$.

(2) أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

(أ) $\left(x^2+xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$.

(ب) $\frac{y'}{x}-\frac{2y}{x^2}=x\cos x$, لكل $x>0$.

(ج) $y'+y=e^xy^{-2}$.

(3) برهن أن $\mu(x,y)=x\ y^2$ هو عامل تكميلي للمعادلة التفاضلية:

$(2y-6x)dx+\left(3x-4x^2y^{-1}\right)dy=0$ ثم أوجد حلَها.

تصحيح الاختبار النهائي 209 ريض

للفصل الأول 1439 - 1440 هـ

السؤال الأول (9 درجات)

(أ) ◦ $a_n = (-1)^n \dfrac{e^{-n}}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}}{n} = 0$$

(1) فإن $\left\{(-1)^n \dfrac{e^{-n}}{n}\right\}$ متقاربة للصفر

◦ $$b_n = \frac{1-\sin(2n)}{\sqrt{n}+1}$$

نعلم أن $-1 \le \sin(2n) \le 1$

$$0 \le 1-\sin(2n) \le 2$$

$$0 \le \frac{1-\sin(2n)}{\sqrt{n}+1} \le \frac{2}{\sqrt{n}+1}$$

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}+1} = 0$ باستخدام نظرية الحصر فإن

(1) $\left\{\dfrac{1-\sin(2n)}{\sqrt{n}+1}\right\}$ متقاربة للصفر

◦ $$c_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \infty - \infty = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n-n^2}{n+\sqrt{n^2+n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{2}$$

(1) وبالتالي $\left\{\sqrt{n^2+n} - n\right\}$ متقاربة للعدد $\frac{1}{2}$.

(ب) نعلم أن $\sin x \le x$ لكل $x \ge 0$

فإن $\left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \le \frac{1}{n^2}$. باستخدام اختبار المقارنة

(1.5) فنستنتج أن $\sum_n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ متقاربة تقاربًا مطلقًا. ($\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ متسلسلة p حيث $p=2>1$)

• نعلم أن
$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} n < \frac{\pi}{2}$$
وبالتالي
$$\left|\frac{\tan^{-1} n}{1+n^2}\right| < \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1+n^2}\right) < \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}$$

1,5 باستخدام اختبار المقارنة للمتسلسلات فنستنتج أن

$\sum_n \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2}$ متقاربة تقارباً مطلقاً.

△ من الممكن استخدام اختبار التكامل.

• نستخدم اختبار نهاية المقارنة للمتسلسلات الموجبة

عندئذ $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$; $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

1,5 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ وبما أن $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ متقاربة (متسلسلة p - حيث $p = 3/2 > 1$)

فنستنتج أن $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ متقاربة تقارباً مطلقاً.

• $\sum_n (-1)^n \frac{n^2}{10^n}$ متسلسلة معروفة. ندرس المتسلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{10^n}$

نستخدم اختبار النسبة لـ $|a_n| = \frac{n^2}{10^n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2}\,\frac{10^n}{10^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{10} < 1$$

1,5 فنستنتج أن $\sum_n \frac{n^2}{10^n}$ متقاربة وبالتالي $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{10^n}$ متقاربة مطلقاً.

<u>السؤال الثاني</u>: (6 درجات)

(أ)

1 $$\ln(1+x^2) = \int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

1 نعلم أن $\frac{1}{1-u} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u^n$ لكل $-1 < u < 1$

نضع $u = -t^2$ فإن

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \quad \text{لكل } -1 < t < 1$$

0,5 عندئذ

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n t^{2n+1} \quad \text{لكل } -1 < t < 1$$

باستخدام تكامل متسلسلة القوى:

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \left(\int_0^x t^{2n+1}\right) dt$$

0,5 $$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \frac{\left[t^{2n+2}\right]_0^x}{2n+2}$$

$-1<x<1$ لكل $$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

حيث
$$a_n = \begin{cases} 0 & ; n=0 \\ \frac{(-1)^{k-1}}{k} & ; n=2k\geq 2 \\ 0 & ; n=2k+1 \text{ (فردي)} \end{cases}$$

0,5

(متسلسلة ماكلورين لـ f هي: $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \cdots$)

(ب)

لكل $u \in \mathbb{R}$ $$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \cdots$$

نضع $u = x^3$؛

0,5 $$\sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + \frac{x^{15}}{5!} - \cdots$$

$$\sin(x^3) - x^3 = -\frac{x^9}{6} + \frac{x^{15}}{5!} - \cdots$$

0,5 $$\frac{\sin(x^3) - x^3}{x^9} = -\frac{1}{6} + \frac{x^6}{5!} + \cdots$$

0,5 $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3) - x^3}{x^9} = -\frac{1}{6}.$$

نضع الآن $u = x^2$.

0,5 $$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots$$

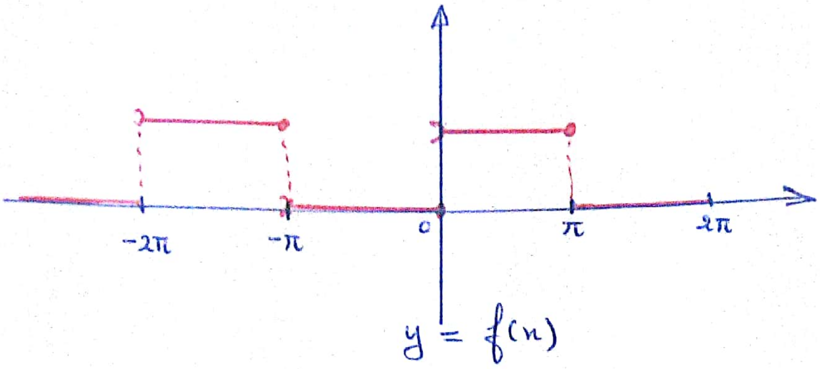
0,5 $$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx \approx \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6}\right) dx$$

$$\approx \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = \frac{13}{42}$$

السؤال الثالث (8 درجات)

(أ) 1

1



$T = \pi$

(ب) f دالة متصلة على $(-\pi,\pi)\backslash\{0\}$ فانها تحظى بمفكوك فورية على $(-\pi,\pi)\backslash\{0\}$

0,5
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

حيث
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

0,5
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 1$$

لكل $n \geq 1$,
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

• $\sin(n\pi) = 0$ لكل $n \in \mathbb{Z}$

1
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

• $\cos(n\pi) = (-1)^n$ لكل $n \in \mathbb{Z}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$

1
$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

إذن لكل $-\pi < x < 0$ لدينا
$$0 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right]\sin(nx)$$

لكل $0 < x < \pi$ لدينا
$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right]\sin(nx)$$

(ج) لكل $0 < x < \pi$ لدينا

0,5
$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)x)$$

نأخذ $x = 1$ فان
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)}{(2n-1)}$$

فنستنتج أن

0,5
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)}{(2n-1)}$$

② f دالة متصلة على $(0,+\infty)$ فإن تكامل الجيب التمام فورية هو

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} A(\alpha)\cos(\alpha x)\,d\alpha$$

0,5

حيث

$$A(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

0,5

$$A(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\alpha x)\,dx$$ باستخدام التكامل بالتجزئة:

$$u(x) = e^{-x} \qquad\qquad u'(x) = -e^{-x}$$
$$v'(x) = \cos(\alpha x) \Rightarrow v(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$$

$$A(\alpha) = I = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\underbrace{\left[e^{-x}\sin(\alpha x)\right]_0^{+\infty}}_{0} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(\alpha x)\,dx$$

$e^{-\infty} = 0$

$|\sin u| < 1$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(\alpha x)\,dx$$

$$u_1(x) = e^{-x} \qquad\qquad u_1'(x) = -e^{-x}$$
$$v_1'(x) = \sin(\alpha x) \Rightarrow v_1(x) = \frac{-\cos(\alpha x)}{\alpha}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(\alpha x)\,dx = -\frac{1}{\alpha}\left[e^{-x}\cos(\alpha x)\right]_0^{\infty} - \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x\,dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} I$$

إذن

1

$$I = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} I\right) = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} I$$

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) I = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$I = \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} = \boxed{\frac{1}{1+\alpha^2} = A(\alpha)}$$

$$\boxed{e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2}\,d\alpha}$$, $x > 0$ إذن لكل

نأخذ الآن قيمة $x = 1$,

1

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-1}$$

السؤال الرابع (17 درجة)

1

$$f(x,y) = \sin(x^3 - y^3)$$

1.5

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \cos(x^3 - y^3)$$ وبالتالي

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3y^2 \cos(x^3 - y^3)$$

0.5

$$3y^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2(3x^2\cos(x^3-y^3)) - 9x^2y^2\cos(x^3-y^3) = 0$$

2 (أ)

$$\boxed{(x^2+xy+y^2)\,dx - x^2 dy = 0}$$ (*) معادلة تفاضلية متجانسة

$$(x^2+xy+y^2)\,dx = x^2 dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2} = f(x,y)$$

1

نأخذ $y = ux$ فإن

$$f(x,ux) = \frac{x^2+ux^2+u^2x^2}{x^2}$$

$$f(x,ux) = 1+u+u^2 = F(u).$$

1

$$\frac{du}{F(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$y = ux$

$u = y/x$

$$\tan^{-1}(u) = \ln(Ax) \;;\; A \in \mathbb{R}$$

$$\tan^{-1}(y/x) = \ln(Ax)$$

2

الحل العام للمعادلة (*) هو:

$$\boxed{y = x\tan(\ln(Ax))}$$

(ب)

$$x>0\;,\quad \frac{y'}{x} - \frac{2y}{x^2} = x\cos x$$

$$\boxed{y' - \frac{2}{x}y = x^2\cos x}$$ ** هي معادلة تفاضلية خطية

1

وتكتب على الشكل $y' + P(x)y = Q(x)$ حيث $P(x) = -2/x$ و $Q(x) = x^2\cos x$.

العامل التكاملي

1 $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -2/x\,dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}}$

$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$

فان الحل العام لـ ** هو :

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(t)\, Q(t)\, dt$$

$$= x^2 \int \frac{1}{t^2} t^2 \cos t\, dt = x^2 \int \cos t\, dt$$

$$= x^2 \left[\sin x + C \right]$$

1 $$\boxed{y(x) = \underbrace{x^2 \sin x}_{y_p} + \underbrace{C x^2}_{y_c}}$$

(٢) $y' + y = e^{x} y^{-2}$ (**) هي معادلة بيرنولي

حيث $n = -2$

نضع $z = y^{1-n} = y^3$. بضرب طرفي المعادلة في y^2

1 $$y' y^2 + y^3 = e^{x}$$

(*) $\boxed{z' + 3z = 3e^{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} z' + z = e^{x}$

خطية

$p(x) = 3$

$Q(x) = 3e^{x}$

فان العامل التكاملي :

$$\mu(x) = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}$$

فان الحل العام لـ (*)

1 $$z = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(t)\, Q(t)\, dt$$

$$= e^{-3x} \int 3e^{3t} e^{t}\, dt = 3e^{-3x} \int e^{4t}\, dt$$

$$z = 3e^{-3x} \left[\frac{1}{4} e^{4x} + C \right] = \frac{3}{4} e^{x} + A e^{-3x}$$

1 $$y^3 = 3/4\, e^{x} + A e^{-3x}$$

$$\boxed{y = \left[3/4\, e^{x} + A e^{-3x} \right]^{1/3} ; \quad A \in \mathbb{R}}$$

③ بضرب طرفي المعادلة ب μ

$$xy^2(2y-6x)\,dx + xy^2(3x-4x^2y^{-1})\,dy = 0$$

$$* \quad \boxed{(2xy^3-6x^2y^2)\,dx + (3x^2y^2-4x^3y)\,dy = 0}$$

تكتب على الشكل

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

حيث

كثيرات حدود

$$M(x,y) = 2xy^3 - 6x^2y^2$$
$$N(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 6xy^2 - 12x^2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 6xy^2 - 12x^2y$$

- بما أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ فإن $(*)$ هي تامة وبالتالي μ هو عامل تكامل.

2

إذن يوجد دالة $F(x,y)$ بحيث

$$dF = M\,dx + N\,dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$ عندئذ:

1

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 - 6x^2y^2 & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y & (2) \end{cases}$$

بمكاملة (1) بالنسبة ل x ,

$$F(x,y) = \int (2xy^3 - 6x^2y^2)\,dx$$

1

$$F(x,y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 + g(y)$$

بالاشتقاق بالنسبة ل y $\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4x^3y + g'(y)$ مع المقارنة مع (2)

$g'(y) = 0$ إذن $g = cst$.

فإن الحل العام هو $F(x,y) = c \Leftrightarrow$ 1 $\boxed{x^2y^3 - 2x^3y^2 = c}$

حيث $C \in \mathbb{R}$

⚠ (*) هي متجانسة

Scanned by CamScanner