

الإختبار النهائي لمقرر III رياض	كلية العلوم - قسم الرياضيات
الفصل الصيفي 1438 / 1439 هـ الزمن: 3 ساعات	الإسم / الرقم الجامعي / أستاذ المقرر /
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <div style="border-bottom: 1px solid black; width: 50px; margin: 0 auto;"></div> <div style="text-align: center; margin-top: 5px;">40</div> </div> الدرجة:	

ملاحظات: 1. عدد الورقات 6 2. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال 1	السؤال 2	السؤال 3	السؤال 4	السؤال 5	السؤال 6
3 درجات	3 درجات	14 درجات	6 درجات	8 درجات	6 درجات

السؤال الأول: استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل $\int_1^2 (x-1)^2 dx$ (3 درجات)

$$f(x) = (x-1)^2, \quad x_k = 1 + \frac{k}{n}$$

$$\int_1^2 (x-1)^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$\stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{3}$$

$$\int_1^2 (x-1)^2 dx = \frac{1}{3}$$

السؤال الثاني:

أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2^x$ على الفترة $[0, 1]$. (3 درجات)

$$\stackrel{(0.5)}{\Rightarrow} \int_0^1 2^x dx = 2^c \quad c \in (0, 1)$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \left[\frac{1}{\ln 2} 2^x \right]_0^1 = 2^c$$

$$\stackrel{(0.5)}{\Rightarrow} \frac{1}{\ln 2} = 2^c$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} c = \log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right)$$

السؤال الثالث: احسب التكاملات التالية :

(درجتان)

$$I = \int (x-1)\sqrt{x+1} dx \quad (1)$$

$$\textcircled{0.5} \quad u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$\textcircled{0.5} \quad I = \int (u-2)u^{1/2} du = \int (u^{3/2} - 2u^{1/2}) du$$

$$\textcircled{0.5} = \frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{4}{3} u^{3/2} + C$$

$$\textcircled{0.5} = \frac{2}{5} (x+1)^{5/2} - \frac{4}{3} (x+1)^{3/2} + C$$

(درجتان)

$$I = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx \quad (2)$$

$$\textcircled{1} \quad I = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\textcircled{1} = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C$$

(درجتان)

$$I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (3)$$

$$\textcircled{1} \quad I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

$$\textcircled{1} = \sqrt{x^2+4} + 2 \operatorname{arsh}^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + C$$

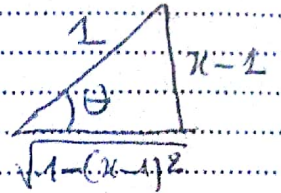
(درجات 3)

$$I = \int \sqrt{2x - x^2} dx \quad (4)$$

$$(0.5) \quad I = \int \sqrt{1 - (x-1)^2} dx$$

$$x-1 = \sin \theta \Rightarrow dx = \cos \theta d\theta$$

$$(0.5) \quad I = \int \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int \cos^2 \theta d\theta$$



$$(0.5 + 0.5) = \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right] + C$$

$$(1) = \frac{1}{2} \left[\theta + \sin \theta \cos \theta \right] + C = \frac{1}{2} \left[\sin^{-1}(x-1) + (x-1) \sqrt{1 - (x-1)^2} \right] + C$$

(درجات 3)

$$I = \int \frac{16}{(x-2)(x^2-4)} dx \quad (5)$$

$$(1.5) \quad \frac{16}{(x-2)(x^2-4)} = \frac{16}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{-1}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{1}{x+2}$$

$$(1.5) \quad I = -\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + \ln|x+2| + C$$

$$I = \int \frac{2^x}{4+4^x} dx \quad (6)$$

(درجتان)

$$\textcircled{1} \quad I = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{(\ln 2) 2^x}{x^2 + (2^x)^2} dx$$

$$\textcircled{1} \quad = \frac{1}{2} \frac{1}{\ln 2} \tan^{-1} \left(\frac{2^x}{x} \right) + C$$

السؤال الرابع:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 3)^{\frac{1}{x}} \quad \text{احسب (أ)}$$

(3 درجات)

$$y = (e^x + 3)^{\frac{1}{x}}$$

$$\textcircled{1} \quad \ln y = \frac{\ln(e^x + 3)}{x}$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x + 3}}{1} = 1$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 3)^{\frac{1}{x}} = e$$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب) (3 درجات)

$$\textcircled{0.5} \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$$

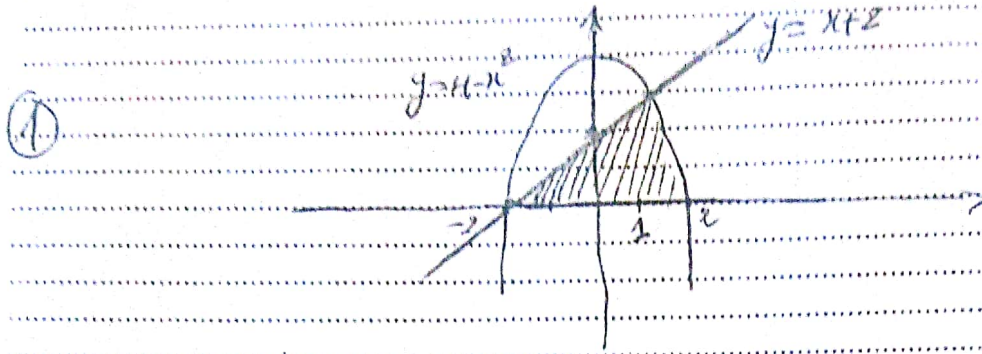
$$\textcircled{0.5} \quad \begin{cases} u = \ln x \\ v = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v' = -\frac{2}{x^3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C$$

$$\textcircled{0.5} \quad I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1 \right]$$

$$\textcircled{0.5} \quad = 1$$

(أ) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$ و $y = 0$ ثم جد مساحتها. (4 درجات)

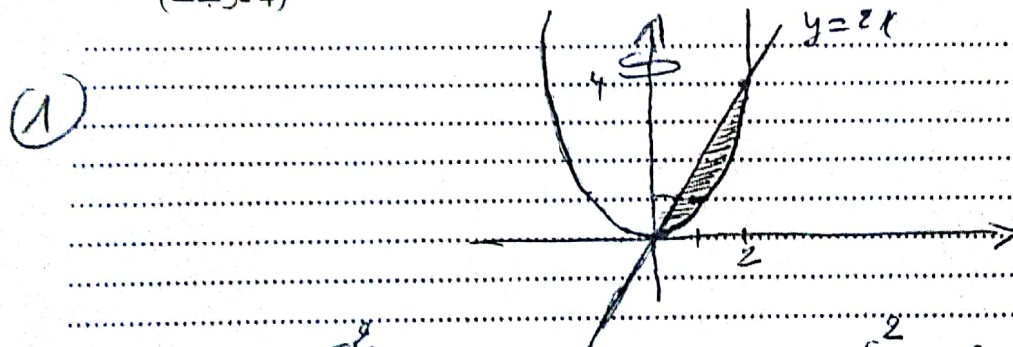


① $A = \int_{-2}^1 (x+2) dx + \int_1^2 (4-x^2) dx$

① $= \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2$

① $= \frac{9}{2} + \frac{5}{3} = \frac{37}{6}$

(ب) ارسم المنطقة R المحصورة بين المنحنيات $y = 2x$ و $y = x^2$ ثم جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة R حول المحور (Oy). (4 درجات)



① $V = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx$

①+① $= 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi$

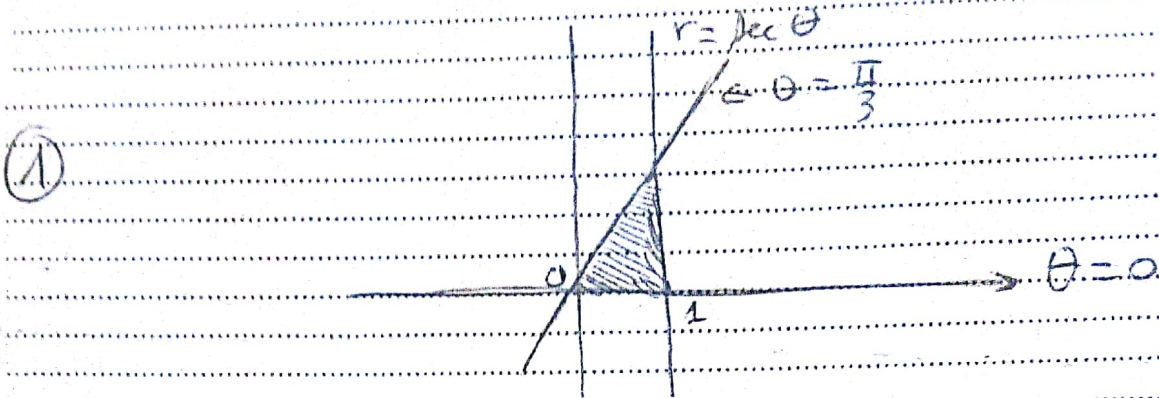
و

$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{1}{4}y^2\right) dy$

$= \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{1}{12}y^3 \right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi$

السؤال السادس :

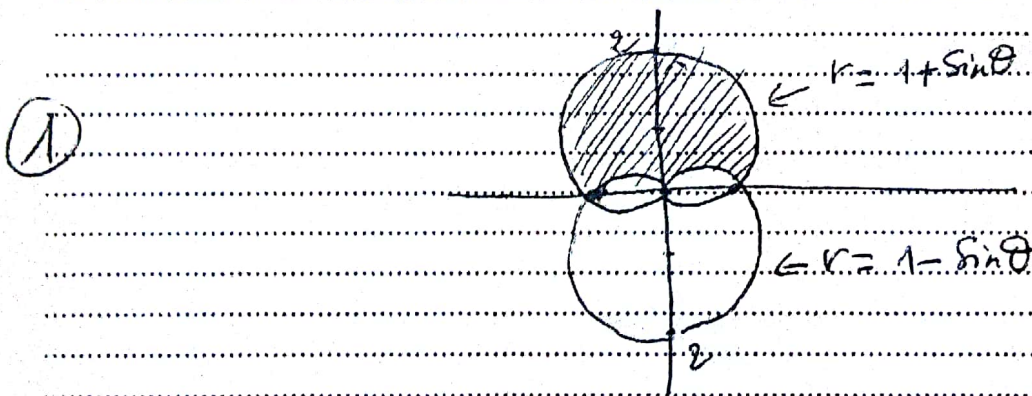
(أ) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $r = \sec \theta$ و $\theta = 0$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ ثم جد مساحتها. (3 درجات)



① $A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} r^2 d\theta$

① $= \frac{1}{2} \left[\tan \theta \right]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ب) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1 + \sin \theta$ وخارج المنحنى $r = 1 - \sin \theta$ ثم جد مساحتها. (3 درجات)



① $A = 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \sin \theta)^2 - (1 - \sin \theta)^2 d\theta \right]$

①.5 $= \int_0^{\pi/2} 4 \sin \theta d\theta$

$= 4 \left[-\cos \theta \right]_0^{\pi/2}$

①.5 $= 4$