جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم - قسم الرياضيات	الإختبار النهائي لمقرر111 ريض
الفصل الثاني 1440 / 1441 هـ	الزمن: 3 ساعات	

ملاحظات 1. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة 2. رتب اجابتك حسب ترتيب ورود الاسئلة واكتب بخط واضح.

ال الجزء الأول (7 درجات):

(1) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=(x-2)^2$ على الفترة $[-1,5]$ (3 درجات).

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln(x)}\sin(t)\,dt$. (درجتان)

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=(1-\cosh^{-1}x)^x\sin(\tan x)$. (درجتان)

الجزء الثاني (16 درجة):

احسب التكاملات التالية :

(1) $\int 7^{2x}\,9^{7^{2x}}\,dx$ (درجتان)

(2) $\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})\,dx$ (3 درجات)

(3) $\int \sin^5 x\cos^3 x\,dx$ (درجتان)

(4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}$ (3 درجات)

(5) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ (3 درجات)

(6) $\int \frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)}dx$ (3 درجات)

الجزء الثالث (17 درجة):

(1) احسب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}$ (درجتان)

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^5\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$ متقارب أم متباعد (3 درجات)

(3) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ و $y=2x$ وجد مساحتها. (3 درجات)

(4) جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y=x^2$, $y^2=x$ حول المحور X .
(3 درجات)

(5) جد طول المنحنى $y=\frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{3}$ من $x=0$ إلى $x=1$. (3 درجات)

(6) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r=1+\cos\theta$ و خارج المنحنى $r=3\cos\theta$. (3 درجات)

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1441 هـ
حل الاختبار النهائي

الجزء الأول (7 درجات):

(1) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = (x-2)^2$ على الفترة $[-1,5]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$ $\frac{1}{2}$

حيث $f(x) = (x-2)^2$ و $[a,b] = [-1,5]$ $\frac{1}{2}$

$$(5-(-1))\,(c-2)^2 = \int_{-1}^{5} (x-2)^2\,dx$$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ $$6\,(c-2)^2 = \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{-1}^{5} = \frac{(5-2)^3}{3} - \frac{(-1-2)^3}{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = 9-(-9) = 18$$

1

$$\Longrightarrow (c-2)^2 = 3 \Longrightarrow c-2 = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow c = 2 \pm \sqrt{3}$$

لاحظ أن $c = 2 \pm \sqrt{3}$ كلاهما يقع في الفترة $[-1,5]$

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln|x|} \sin(t)\,dt$ حيث $x > 0$.

الحل : $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{\ln|x|} \sin(t)\,dt$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$$= \sin(\ln|x|)\,\frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\sin(\ln|x|)}{x} + \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

1

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = (1-\cosh^{-1}x)^x\ \sin(\tan x)$.

الحل : $\ln|f(x)| = \ln\left|(1-\cosh^{-1}x)^x\ \sin(\tan x)\right|$ $\frac{1}{2}$

$$\ln|f(x)| = \ln\left|(1-\cosh^{-1}x)^x\right| + \ln|\sin(\tan x)| = x\,\ln\left|1-\cosh^{-1}x\right| + \ln|\sin(\tan x)|$$ $\frac{1}{2}$

باشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1)\ \ln\left|1-\cosh^{-1}x\right| + x\,\frac{\left(0-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{1-\cosh^{-1}x} + \frac{\cos(\tan x)\ \sec^2 x}{\sin(\tan x)}$$ $\frac{1}{2}$

$$f'(x) = f(x)\left[\ln\left|1-\cosh^{-1}x\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}\ (1-\cosh^{-1}x)} + \cot(\tan x)\ \sec^2\right]$$ $\frac{1}{2}$

الجزء الثاني (16 درجة) : أحسب التكاملات التالية :

$$\int 7^{2x}\, 9^{7^{2x}}\, dx \quad (1)$$

الحل :

١ ٢

$$\int 7^{2x}\, 9^{7^{2x}}\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\ln 7}\int 9^{7^{2x}}\,\left(7^{2x}(2)\ln 7\right)\, dx = \frac{1}{2\ln 7}\,\frac{9^{7^{2x}}}{\ln 9} + c$$

باستخدام القانون $\int a^{f(x)} f'(x)\, dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$ حيث $a > 0$

$$\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\, sech^2\left(\sqrt{x}\right)\, dx \quad (2)$$

الحل :

١

$$\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\, sech^2\left(\sqrt{x}\right)\, dx = 2\int_1^4 sech^2\left(\sqrt{x}\right)\,\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\, dx = 2\left[\tanh\left(\sqrt{x}\right)\right]_1^4$$

٢ ١

$$= 2\left[\tanh(\sqrt{4}) - \tanh(\sqrt{1})\right] = 2\left[\tanh(2) - \tanh(1)\right] = 2\left[\frac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}} - \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}}\right]$$

باستخدام القانون $\int sech^2\left(f(x)\right)\, f'(x)\, dx = \tanh\left(f(x)\right) + c$

$$\int \sin^5 x\, \cos^3 x\, dx \quad (3)$$

الحل :

$\frac{1}{2}$

$$\int \sin^5 x\, \cos^3 x\, dx = \int \sin^5 x\, \cos^2 x\, \cos x\, dx = \int \sin^5 x\,\left(1 - \sin^2 x\right)\, \cos x\, dx$$

$\frac{1}{2}$ بوضع $u = \sin x$

$$du = \cos x\, dx$$

$\frac{1}{2}$

$$\int \sin^5 x\,(1 - \sin^2 x)\, \cos x\, dx = \int u^5\,(1 - u^2)\, du = \int (u^5 - u^7)\, du$$

$$= \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + c = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + c$$

$\frac{1}{2}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^4}} \quad (4)$$

الحل : 1

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{1}{x\sqrt{1+(x^2)^2}}\,dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{1+(x^2)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2\sqrt{1+(x^2)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(-csch^{-1}\left(x^2\right)\right) + c = -\frac{1}{2}\,csch^{-1}\left(x^2\right) + c$$

1/2 1/2

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\,csch^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

(5) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

الحل :

1

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x+4)+4}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-(x^2-4x+4)}}$$

1

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2)^2-(x-2)^2}} = \left[\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_1^2$$

1/2

$$= \sin^{-1}(0) - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

1/2

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

(6) $\int \frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)}\,dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

1

$$\frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$2x^2-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(4x-1)$$

$$2x^2-1 = Ax^2 + A + 4Bx^2 + 4Cx - Bx - C$$

$$2x^2-1 = (A+4B)x^2 + (-B+4C)x + (A-C)$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

1/2

$$A+4B = 2 \longrightarrow (1)$$
$$-B+4C = 0 \longrightarrow (2)$$
$$A-C = -1 \longrightarrow (3)$$

من المعادلة (2) نجد أن : $B = 4C$

بطرح المعادلة (3) من المعادلة (1) نجد أن : $4B + C = 3$

$$4(4C) + c = 3 \implies 16C + C = 3 \implies 17C = 3 \implies C = \frac{3}{17}$$

$\frac{1}{2}$

من المعادلة (2) نجد أن : $B = 4C = 4\left(\frac{3}{17}\right) = \frac{12}{17}$

من المعادلة (3) نجد أن : $A = -1 + C = -1 + \frac{3}{17} = \frac{-17+3}{17} = -\frac{14}{17}$

$\frac{1}{2}$

$$\int \frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{14}{17}}{4x-1} + \frac{\frac{12}{17}x + \frac{3}{17}}{x^2+1}\right) dx$$

$$= -\frac{14}{17}\int \frac{1}{4x-1}\,dx + \frac{12}{17}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{3}{17}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$\frac{1}{2}$

$$= -\frac{14}{17}\frac{1}{4}\int \frac{4}{4x-1}\,dx + \frac{12}{17}\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{3}{17}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\frac{7}{34}\ln|4x-1| + \frac{6}{17}\ln(x^2+1) + \frac{3}{17}\tan^{-1}x + c$$

الجزء الثالث (17 درجة) :

(1) أحسب $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{3x^2}$

الحل :

$\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$\frac{1}{2}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0-(-\sin 3x\,(3))}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$\frac{1}{2}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\ \cos 3x}{2} = \frac{3\ (1)}{2} = \frac{3}{2}$$

$\frac{1}{2}$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}} = \lim_{t\to 5^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{5-x}} = \lim_{t\to 5^-}\int_0^t (5-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \lim_{t\to 5^-}\left((-1)\int_0^t (5-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)\, dx\right) = \lim_{t\to 5^-}\left((-1)\left[\frac{(5-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^t\right)$$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{t\to 5^-}\left((-1)\left[2\sqrt{5-x}\right]_0^t\right) = \lim_{t\to 5^-}\left((-1)\left[2\sqrt{5-t}-2\sqrt{5-0}\right]\right)$$

$$= \lim_{t\to 5^-}\left(2\sqrt{5}-2\sqrt{5-t}\right) = 2\sqrt{5}-0 = 2\sqrt{5}$$ $\frac{1}{2}$

التكامل المعتل متقارب وقيمته $2\sqrt{5}$.

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ واحسب مساحتها .

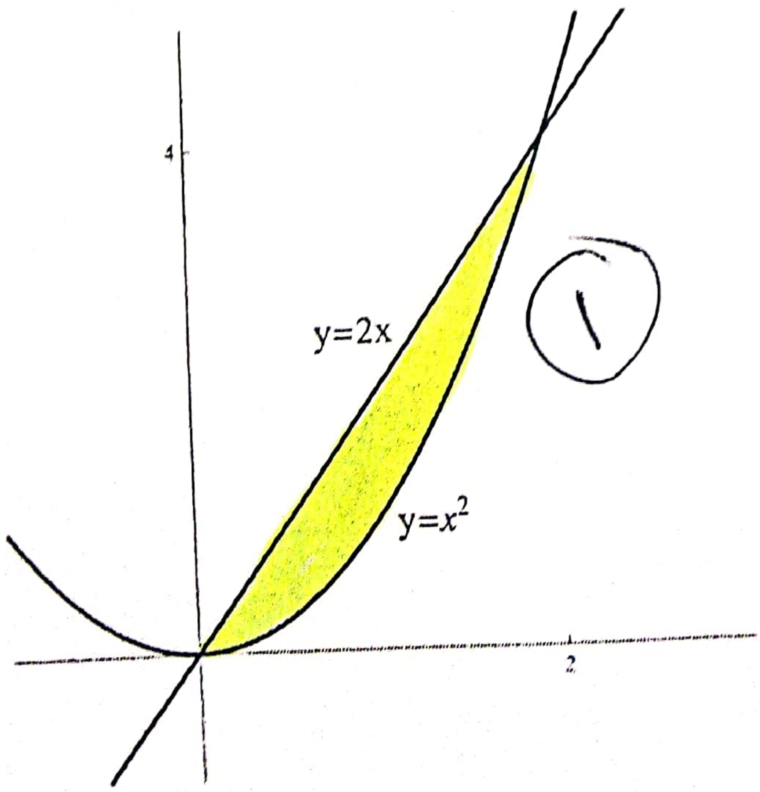
الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله 2

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$: $\frac{1}{2}$

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0 \implies x = 0\ ,\ x = 2$$



$$A = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - (0-0) = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

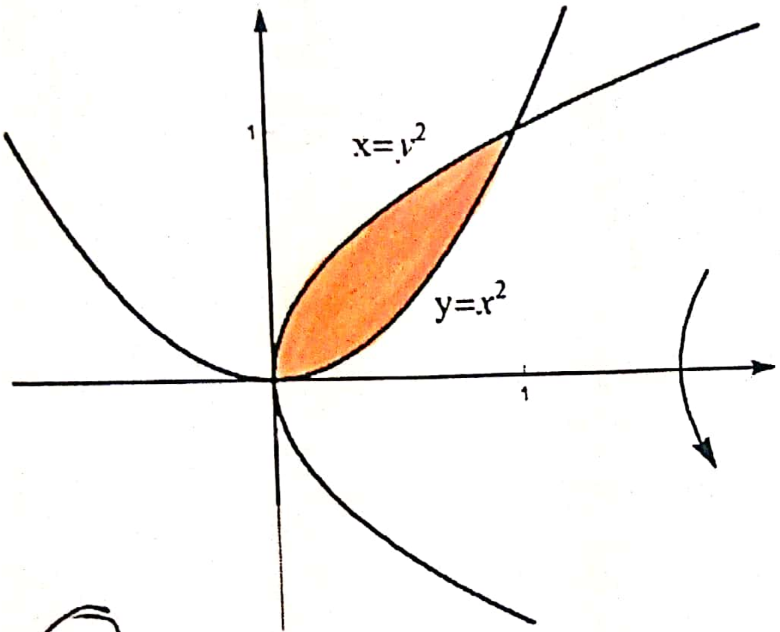
(4) جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y^2 = x$ حول محور x .

الحل :

$y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

$x = y^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته إلى اليمين

لاحظ أن المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للمنحنى $x = y^2$.



1

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0 \implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0\,,\ x = 1$$

باستخدام طريقة الوردات : $\frac{1}{2}$

1

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^2)^2 \right] dx = \pi \int_0^1 \left(x - x^4\right) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$\frac{1}{2}$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - (0 - 0) \right] = \frac{3\pi}{10}$$

(5) جد طول المنحنى $y = \dfrac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{3}$ من $x = 0$ إلى $x = 1$.

الحل :

$$y' = \frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\,(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\,2x = x\,\sqrt{x^2+2}$$

$\frac{1}{2}$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(x\,\sqrt{x^2+2}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (x^2\,(x^2+2))}\,dx$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

1/2

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x^4+2x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx = \int_0^1 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx$$

1/2

$$= \int_0^1 |x^2+1|\,dx = \int_0^1 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}+1\right) - (0+0) = \frac{4}{3}$$

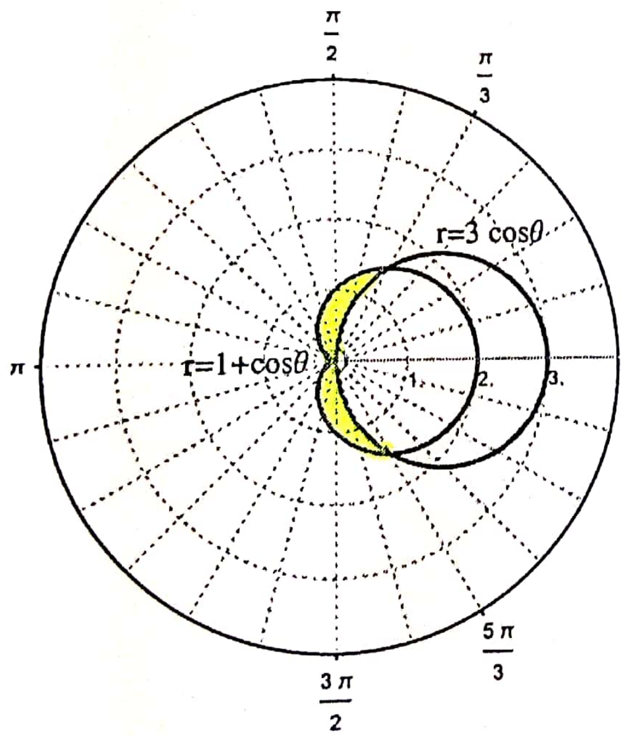
1/2

(6) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1+\cos\theta$ وخارج المنحنى $r = 3\cos\theta$.

الحل :

المنحنى $r = 1+\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3\cos\theta$ يمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = \left(\frac{3}{2},0\right)$ ونصف قطرها $\frac{3}{2}$



1/2

نقاط تقاطع المنحنى $r = 1+\cos\theta$ مع المنحنى $r = 3\cos\theta$:

1/2

$$3\cos\theta = 1+\cos\theta \implies 2\cos\theta = 1 \implies \cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3}\ ,\ \theta = \frac{5\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1+\cos\theta)^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)^2\,d\theta\right)$$

1/2

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)\,d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right] d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{2}(1+\cos 2\theta)\ d\theta$$

1/2

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right] d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

1/2

$$= \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} - \left[\frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{3\pi}{2} + 0 + 0\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right] - \left[\left(\frac{9\pi}{4} + 0\right) - \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)\right]$$

1/2

$$= \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{9\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= \pi - \frac{9\sqrt{3}}{8} - \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$