د/برهان

جامعة الملك سعود King Saud University — كلية العلوم - قسم الرياضيات	الإختبار النهائي لمقرر 111 ريض
الإسم / .... الرقم الجامعي / .... أستاذ المقرر /	الفصل الأول 1438 / 1439 هـ الزمن: 3 ساعات الدرجة: 40

ملاحظات : 1. عدد الورقات 6   2. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال 1	السؤال 2	السؤال 3	السؤال 4	السؤال 5	السؤال 6	السؤال 7	السؤال 8
3 درجات	14 درجة	6 درجات	3 درجات	3 درجات	درجتان	3 درجات	6 درجات

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3\sqrt{x-1}$ على الفترة $[1,5]$. (3 درجات)

1 $c\in(1,5)$ حيث $\int_1^5 3\sqrt{x-1}\,dx=(5-1)\,3\sqrt{c-1}$

$3\int_1^5 (x-1)^{1/2}\,dx = 12\sqrt{c-1}$

1 $\cancel{3}\times\frac{2}{\cancel{3}}\left[(x-1)^{3/2}\right]_1^5 = 12\sqrt{c-1}$

$16 = 2\times 2^3 = 12\sqrt{c-1}$

1 $\sqrt{c-1}=\frac{4}{3} \Rightarrow c-1=\frac{16}{9} \Rightarrow c=\frac{25}{9}\in(1,5)$

السؤال الثاني : احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx$ (درجتان)

$\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}dx$

1 $u=e^{-x} \Rightarrow du=-e^{-x}dx$

$\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\sin^{-1}(u)+cst$

1 $= -\sin^{-1}(e^{-x})+cst$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)}$ (2) (درجتان)

نضع $u=\sqrt{x}$ فإن $x=u^2$

$du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ وبالتالي $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} = 2\int \frac{du}{1-u^2} = 2\tanh^{-1}(u)+cst$$

$$= 2\tanh^{-1}(\sqrt{x})+cst$$

$$= \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+cst$$

$\int 7^{3x-1}\,dx$ (3) (درجتان)

0,5 نضع $u=3x-1$ فإن $du=3\,dx$

1 $$\int 7^{3x-1}dx = \frac{1}{3}\int 7^{u}\,du = \frac{1}{3\ln 7}7^{u}+cst$$

0,5 $$= \frac{1}{3\ln 7}7^{3x-1}+cst$$

$\int x\ \sec^{-1}x\ dx$ (4) (درجتان)

نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة:

1 $u(x)=\sec^{-1}x \qquad v'(x)=x \implies u'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad v(x)=\frac{x^2}{2}$

$$\int x\sec^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}dx$$

1 $$= \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+cst$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$ (5) (3 درجات)

1 نستخدم طريقة إكمال المربع: $x^2+4x+8=(x+2)^2+4$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2+(x+2)^2}}$$

2 $$= \sinh^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right) + cst$$

$$= \ln\left(\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x+8}}{2}\right) + cst$$

(6) $\int \frac{4x^2-13x+6}{(x+2)(x-2)^2}\, dx$ (3 درجات)

0,5 $$\int \frac{4x^2-13x+6}{(x+2)(x-2)^2}\,dx = \int \left[\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}\right] dx$$

1 $$= A\ln|x+2| + B\ln|x-2| - \frac{C}{x-2} + cst.$$

$$= 3\ln|x+2| + \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + cst$$

حساب الثوابت : $g(x) = \frac{4x^2-13x+6}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$ لكل $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$

$$\boxed{A} = \lim_{x\to -2} (x+2)\,g(x) = \lim_{x\to -2} \frac{4x^2-13x+6}{(x-2)^2} = \frac{48}{16} = \boxed{3}.$$

1,5 $$\boxed{C} = \lim_{x\to 2} (x-2)^2 g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{4x^2-13x+6}{x+2} = \frac{-4}{4} = \boxed{-1}.$$

$$g(0) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{A}{2} - \frac{B}{2} + \frac{C}{4} = \frac{3}{2} - \frac{B}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{B = 1}.$$

السؤال الثالث:

(أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$. (3 درجات)

نضع $f(x) = \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$, $x \neq 0$

1 $$\ln|f(x)| = (3x)\ln\left|1+\frac{2}{x}\right|$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

قاعدة لوبيتال

1 $u = 1/x$ نضع $$= \lim_{u\to 0^+} 3\,\frac{\ln(1+2u)}{u} = 3\lim_{u\to 0^+} \frac{2}{1+2u} = 6$$

1 وبالتالي $$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = e^6$$

(ب) بيّن فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب) . (3 درجات)

0,5 $$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_2^{t}\frac{dx}{x(\ln x)^2}\right)$$

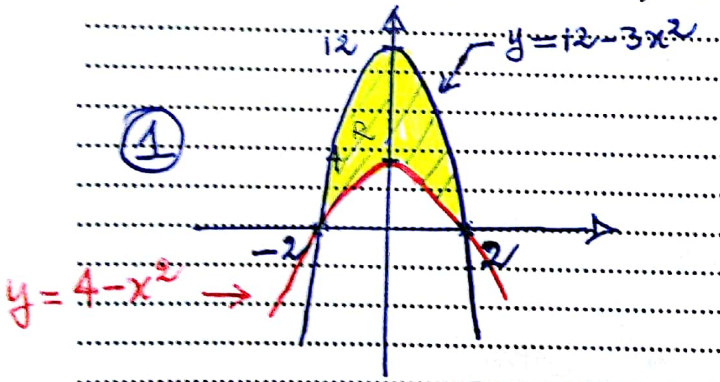
1,5 $$\int_2^{t}\frac{dx}{x(\ln x)^2} \underset{u=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln t}\frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln t}$$

$$= -\frac{1}{\ln t}+\frac{1}{\ln 2}$$

1 وبما أن: $\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$ فإن: $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\frac{1}{\ln 2}$

متقارب وقيمته $\frac{1}{\ln 2}$

السؤال الرابع: ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y=12-3x^2$ و $y=4-x^2$ وجد مساحتها. (3 درجات)



1

• نقاط التقاطع:

$y=4-x^2=12-3x^2$

$3x^2-x^2=12-4$

$2x^2=8$

$\begin{cases} x=\pm2 \\ y=0 \end{cases}$ أي $x^2=4$ (1)

• المنطقة R هي:

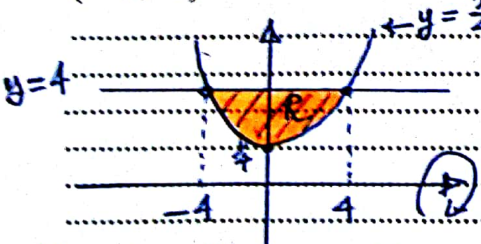
$R=\{(x,y)\ /\ -2\le x\le 2,\ 4-x^2\le y\le 12-3x^2\}$

إذن مساحتها

0,5 $A(R)=\int_{-2}^{2}[(12-3x^2)-(4-x^2)]\,dx$

0,5 $=2\int_0^{2}(8-2x^2)\,dx = 2\left[8x-2x^3/3\right]_0^{2}=\frac{4\times16}{3}=\frac{64}{3}$

السؤال الخامس: جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x^2=4y$ و $y=4$ حول المحور (Ox). (3 درجات)



$x=\pm4 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x^2=4\cdot4$

$R=\{(x,y)\ /\ -4\le x\le 4,\ \frac{x^2}{4}\le y\le 4\}$

نستخدم طريقة الأقراص الاسطوانية

حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة R حول (Ox)

$V(S)=\pi\int_{-4}^{4}\left[4^2-\left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right]dx$ (2)

$$V(S) = \pi \int_{-4}^{4} \left(16 - \frac{x^4}{16}\right) dx$$

(1) $$= 2\pi \int_0^4 \left(16 - \frac{x^4}{16}\right) dx = 2\pi \left[16x - \frac{x^5}{5 \times 16}\right]_0^4$$

$$= 2\pi \left[64 - \frac{4^5}{5 \times 16}\right] = 128\pi\left(1 - \tfrac{1}{5}\right) = \frac{512}{5}\pi$$

السؤال السادس: جد طول القوس $y = \ln(\sin x)$ من $x = \frac{\pi}{6}$ إلى $x = \frac{\pi}{3}$. (درجتان)

(1) طول المنحنى $$L(C) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}[\ln(\sin x)]\right)^2}\, dx$$

$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \quad ; \quad 1 + \cot^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2$$

(0,5) وبالتالي $$L(C) = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc x \, dx$$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$L(C) = \Big[\ln|\csc x - \cot x|\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \ln(2 - \sqrt{3})$$

(0,5) $$= \left[\ln(2+\sqrt{3}) - \tfrac{1}{2}\ln 3\right]$$

السؤال السابع: جد مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران بيان المنحنى $y = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{x} - x^{3/2}\right)$ على الفترة $[1, 3]$ حول المحور (Ox). (3 درجات)

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{x} - x^{3/2}\right)$$ نضع

(0,5) $$f'(x) = \frac{1}{\cancel{3}}\left[\cancel{3}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\cancel{3}}{2}\,x^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right]$$

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4x} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^2$$

مساحة سطح ط

(0,5) $$S.A = 2\pi \int_1^3 \frac{1}{3}\left(3\sqrt{x} - x^{3/2}\right) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

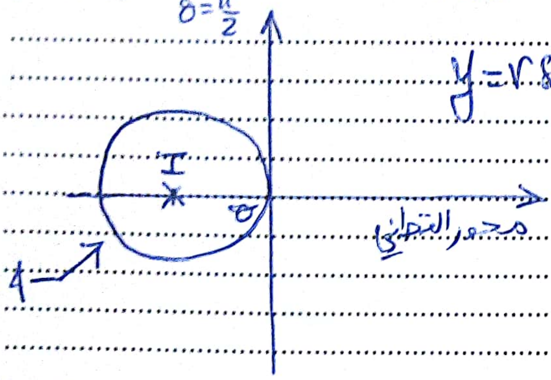
(1) $$= 2\pi \int_1^3 \frac{1}{3}\left(3\sqrt{x} - x^{3/2}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx$$

(0,5) $$= \frac{\pi}{3} \int_1^3 \left(3\sqrt{x} - x^{3/2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx = \frac{\pi}{3} \int_1^3 \left[3 + 2x - x^2\right] dx$$

(0,5) $$= \pi/3 \left[3x + x^2 - x^3/3\right]_1^3 = \pi/3\left(9 - \frac{11}{3}\right) = \frac{16\pi}{9}.$$

السؤال الثامن :

(أ) حوّل المعادلة الديكارتية $(x+2)^2 + y^2 = 4$ إلى القطبية ثم تعرف على بيانها. (3 درجات)



نضع $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = -4x$$

$$r^2 = -4r\cos\theta$$

$$\boxed{r = -4\cos\theta}$$ (2)

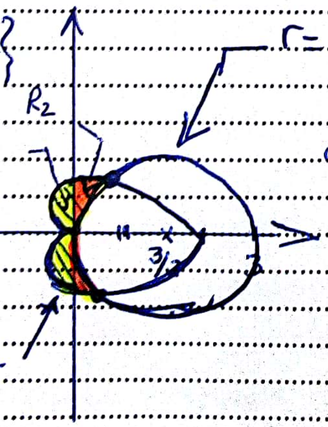
معادلة دائرة مركزها $I(-2,0)$ ونصف قطرها $R=2$

(ب) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى القلبي $r = 1+\cos\theta$ وخارج الدائرة $r = 3\cos\theta$ ثم جد مساحتها. (3 درجات)

$R_1 = \{(r,\theta) / \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le 1+\cos\theta\}$

$R_2 = \{(r,\theta) / \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 3\cos\theta \le r \le 1+\cos\theta\}$

(1)



$r = 3\cos\theta$ هي معادلة دائرة مركزها $I(3/2, 0)$ ونصف قطرها $R = 3/2$

نقاط التقاطع :

$$r = 1+\cos\theta = 3\cos\theta$$

$$2\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = 1/2$$

(0,5) $\theta = \pm\pi/3 \Leftarrow$

باستخدام التناظر فإن مساحة المنطقة المطلوبة

(1) $$A(R) = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left[\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[(1+\cos\theta)^2 - (3\cos\theta)^2\right] d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta\right]$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta - 9\cos^2\theta\right] d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left[1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right] d\theta$$

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$$= \left[\theta + 2\sin\theta - 4\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\right]_{\pi/3}^{\pi/2} + \left[\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2\cdot 2}\right]$$