واجب منزلي الأول 209 ريض

السؤال الأول:

(أ) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = \frac{2x}{4-x^2}$ وماهي فترة تقاربها.

(ب) استنتج من خلال (أ) متسلسلة ماكلورين للدالة $g(x) = \ln(4-x^2)$

(ج) من خلال (ب) استنتج أن

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,4^{n+1}}$$

السؤال الثاني:

(أ) ارسم الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x \; ; & 0<x<1 \\ 1 \; ; & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

(ب) أوجد متسلسلة فورية Sine للدالة f على الفترة $(0,2)$.

رضى 209 تصحيح الواجب الأول

س1 (أ) نعلم أن $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ لكل $-1<u<1$

فإن $\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ لكل $-1<\left(\frac{x}{2}\right)^2<1$

$\frac{1}{4-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+2}}x^{2n}$ لكل $-2<x<2$

فإن متسلسلة ماكلورين للدالة

$f(x) = \frac{2x}{4-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}x^{2n+1}$ لكل $-2<x<2$

و فترة التقارب هي $(-2,2)$ (باستخدام اختبار النسبة للمتسلسلة)

(ب) بما أن

$\ln(4-x^2) = \ln 4 + \int_0^x \frac{-2t}{4-t^2}\,dt$ لكل $-2<x<2$

$\ln(4-x^2) = \ln 4 - \int_0^x \frac{2t}{4-t^2}\,dt$

من خلال (أ)

$\frac{2t}{4-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}\,t^{2n+1}$ لكل $-2<t<t$

باستخدام مبرهنة التكامل للمتسلسلات، فإن لكل $-2<x<2$

$g(x) = \ln(4-x^2) = \ln 4 - \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}t^{2n+1}\right)dt$

$\ln(4-x^2) = \ln 4 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}\left(\int_0^x t^{2n+1}\,dt\right)$

$= \ln 4 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}\,\frac{\left[t^{2n+2}\right]_0^x}{2n+2}$

$\ln(4-x^2) = \ln 4 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+2}(n+1)}x^{2n+2}$ لكل $-2<x<2$

(ج) بتعويض قيمة x بـ $1 \in (-2,2)$ ، نجد أن:

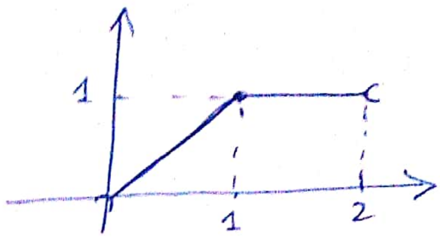
$\ln(3) = \ln 4 - \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2^2)^{n+1}}\right)$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}\right) = \ln 4 - \ln 3 = \ln(4/3) > 0$

السؤال الثاني :

(أ)

$T = 2$



$y = f(x)$

(ب) بما أن f متصلة على $(0,2)$ فإن f تعطي بمفكوك فورييه Sin : لكل $0 < x < 2$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

حيث لكل $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$b_n = \int_0^1 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

- $I_n = \int_0^1 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = -\frac{2}{n\pi}\left[x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$

$$\begin{aligned} u(x) &= x \\ v'(x) &= \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$I_n = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right] + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

- $J_n = \int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]_1^2 = \frac{-2}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

وبالتالي:

$$b_n = \cancel{-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) + \cancel{\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

لكل $0 < x \leq 1$;

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

ولكل $1 \leq x < 2$,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

⚠ $\cos(n\pi) = (-1)^n$; $\sin(n\pi/2) = \begin{cases} (-1)^k ; & n = 2k+1 \\ 0 ; & n = 2k \end{cases}$