جامعة الملك سعود King Saud University	الإختبار النهائي لمقرر111 ريض
كلية العلوم - قسم الرياضيات	
الفصل الأول 1439 / 1440 هـ الزمن: 3 ساعات	

ملاحظات 1. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة 2. رتب اجابتك حسب ترتيب ورود الاسئلة واكتب بخط واضح.

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=4x-5$ على الفترة $[2,5]$. (3 درجات)

السؤال الثاني : احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$ (درجتان)

(2) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (درجتان)

(3) $\int x\ 5^{3x^2+1}\,dx$ (درجتان)

(4) $\int x\cos x\,dx$ (درجتان)

(5) $\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$ (3 درجات)

(6) $\int \frac{x}{x^2+4x+4}\,dx$ (3 درجات)

السؤال الثالث:

(أ) احسب $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$. (3 درجات)

(ب) بيّن فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_2^3 \frac{dx}{x-2}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب) . (3 درجات)

السؤال الرابع : ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y=x^2$ و $y=x$ وجد مساحتها. (3 درجات)

السؤال الخامس:

جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ حول المحور X . (3درجات)

السؤال السادس: احسب طول منحنى الدالة $y=\frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{3}$ من $x=0$ إلى $x=1$. (درجتان)

السؤال السابع:

جد مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران منحنى الدالة $y=\frac{x^3}{3}$ على الفترة $[0,1]$ حول المحور X . (3 درجات)

السؤال الثامن :

(أ) حوّل المعادلة الديكارتية $(x^2+y^2)^2=2xy$ إلى القطبية ثم تعرف على بيانها. (3 درجات)

(ب) ارسم المنطقة الواقعة داخل الدائرة $r=3\sin\theta$ وخارج المنحنى القلبي $r=1+\sin\theta$ ثم جد مساحتها. (3 درجات)

Scanned by CamScanner

تصحيح الاختبار النهائي الرياضيات
للفصل الأول 1439 / 1440 هـ

جواب السؤال الأول:

$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$ ✓ (1)

$\int_2^5 (4x-5)\,dx = 3\,(4c-5) \Rightarrow [2x^2-5x]_2^5 = 12c-15$ ✓ (1)

$[(50-25)-(8-10)] = 12c-15 \Rightarrow 12c = 42 \Rightarrow c = \frac{7}{2} \in (2,5)$ ✓ (1)

جواب السؤال الثاني: (14 درجة)

(1) $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$

$\int \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx$; $\quad x-2 = 2\sin\theta \Rightarrow dx = 2\cos\theta\,d\theta \Rightarrow$

$2\int \sqrt{4-4\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta = 4\int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = 2\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+c$ ✓ (1)

$= 2\left(\theta + \sin\theta\cos\theta\right)+c = 2\left(\sin^{-1}\frac{x-2}{2} + \frac{x-2}{2}\,\frac{\sqrt{4-(x-2)^2}}{2}\right)+c$ ✓ (1)

(2) $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$\sin^{-1}x = t \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int t\,dt = \frac{t^2}{2}+c = \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2}+c$ ✓ (1) ✓ (1)

Scanned by CamScanner

(3)

(1) $\int x\, 5^{3x^2+1}\, dx = \frac{1}{6}\int 6x\, 5^{3x^2+1}\, dx$

(1) $= \frac{1}{6}\frac{5^{3x^2+1}}{\ln 5} + C$

(4)

$\int x \sin x\, dx$ $\quad u = x \quad | \quad dv = \cos x\, dx$

$du = dx \quad v = \sin x$

(1) $\int u\, dv = uv - \int v\, du = x\sin x - \int \sin x\, dx$

(1) $= x\sin x + \cos x + C$

(5)

(1) $\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}\, dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}\right) dx$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ $\quad f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2} = \frac{x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{x+2}$

(1) $A = \lim_{x\to -1} (x+1) f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-2}{1} = -2$

$B = \lim_{x\to -2} (x+2) f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-3}{-1} = 3$

(1) $\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}\, dx = -2\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{x+2}$

$= -2\ln|x+1| + 3\ln|x+2| + C, \; C \in \mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

(2) $\int \frac{x}{x^2+4x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-4}{x^2+4x+4}\,dx$ (6)

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+4}\,dx - 2\int \frac{dx}{(x+2)^2}$

$= \frac{1}{2}\ln\left((x+2)^2\right) + \frac{2}{x+2} + c \,, \quad c \in \mathbb{R}$

(1) ⚠ ممكن استخدام النسور الجزئية

لا يكتب في هذا الهامش

اجابة السؤال الثالث. (6 درجات)

(أ) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ (1/2)

باستخدام قاعدة لوبيتال (1/2)

(1) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{0-\cos x}{-\sin x}$ (3/4) (3/4)

(0.5) $= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}$ (1/4) $= \frac{0}{1} = 0$ (1/4) (1/4)

(ب)

$\int_2^3 \frac{dx}{x-2} = \lim_{t \to 2^+} \int_t^3 \frac{1}{x-2}\,dx$ (1/2)

$= \lim_{x \to 2^+} \left[\ln|x-2|\right]_t^3$ (1/2)

$= \lim_{t \to 2^+} \left[\ln(3-2) - \ln(t-2)\right]$ (1/2)

$= \lim_{t \to 2^+} \left[\ln(1) - \ln(t-2)\right]$ (1/2)

(1/2)

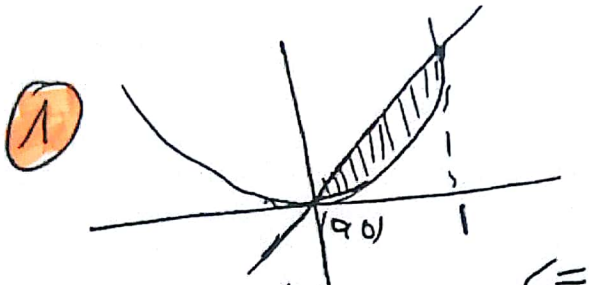
$= \lim_{t \to 2^+} \left[-\ln(t-2)\right] = -(-\infty) = +\infty$

∴ التكامل المعتل متباعد.

(1/2)

Scanned by CamScanner

السؤال الرابع:



(1)

نقاط التقاطع

$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0, \quad x = 1$

(1) $A = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$

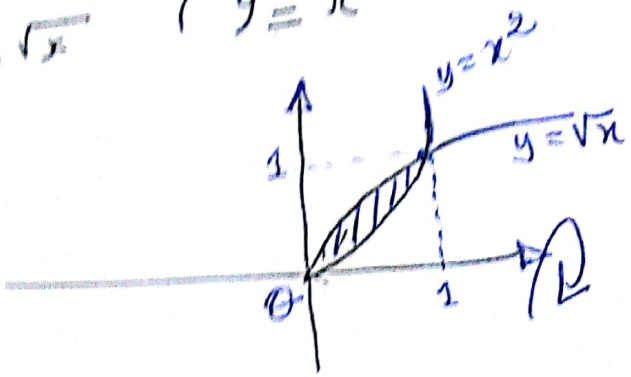
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} =$

(1) $= \frac{1}{6}\ u^2$

Scanned by CamScanner

السؤال الخامس (3 درجات)

$y = \sqrt{x}$ $\quad$ $y = x^2$



نقاط التقاطع

$x^2 = \sqrt{x}$ (1)

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0, \; x = 1$

$$V = \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - (x^4))\,dx = \pi \int_0^1 (x - x^4)\,dx$$ (1)

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}$$ (1)

السؤال السادس (درجتان)

$y = \frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{3}$ $\quad$ $x = 0$ إلى $x = 1$

$$y' = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times 2x (x^2+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = x\sqrt{x^2+2}$$ (1/2)

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (x\sqrt{x^2+2})^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^4 + 2x^2}\,dx$$ (1/2)

$$= \int_0^1 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx$$ (1/2)

$$= \int_0^1 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{4}{3}$$ (1/2)

Scanned by CamScanner

السؤال السابع (3 درجات)

$[0,1]$ $\quad y = \frac{x^3}{3}$

$y' = x^2$

$$S = 2\pi \int_0^1 y\sqrt{1+(y')^2}\,dx \quad (\tfrac{1}{2}) = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}\,dx$$

$$= \frac{2}{4\times 3}\pi \int_0^1 4x^3 (1+x^4)^{\frac{1}{2}}\,dx \quad (\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{2\times 2}{12}\pi \left[\frac{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{9}\pi \left[(2)^{\frac{3}{2}} - 1\right] \quad (\tfrac{1}{2})$$

السؤال الثامن (6 درجات)

(أ)

$$(x^2+y^2)^2 = 2xy$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $\quad (\tfrac{1}{2})$

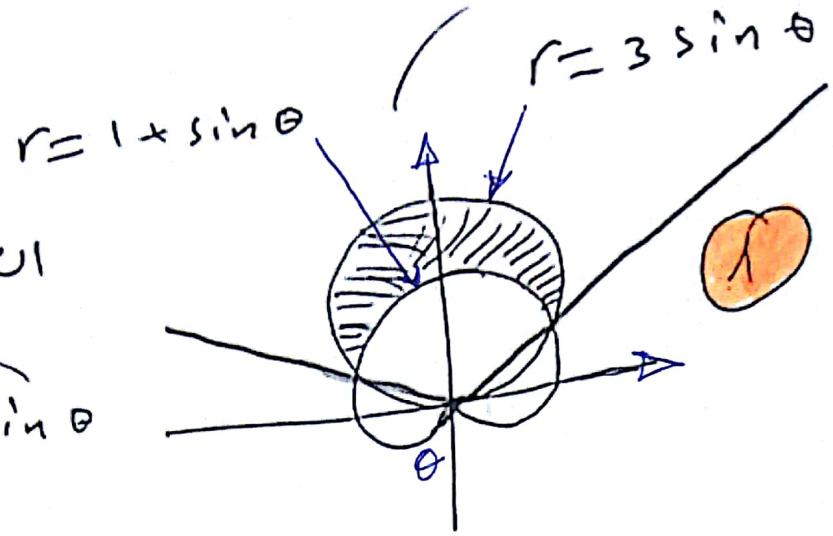
$$(r^2)^2 = 2r^2\sin\theta\cos\theta \quad (1) \qquad \div r^2$$

وباستخدام

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ $\quad (\tfrac{1}{2})$

$$r^2 = \sin 2\theta \quad (1)$$

Scanned by CamScanner



1

التقاطع

$3\sin\theta = 1+\sin\theta$

$2\sin\theta = 1$

$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad / \quad \theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{5\pi}{6}$ ½

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[(3\sin\theta)^2 - (1+\sin\theta)^2\right] d\theta \quad \frac{1}{2}$$

$9\sin^2\theta - (1+\sin^2\theta+2\sin\theta)$
$= 8\sin^2\theta - 1 - 2\sin\theta$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (8\sin^2\theta - 1 - 2\sin\theta)\, d\theta$$

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (3 - 4\cos 2\theta - 2\sin\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[3\theta - 2\sin 2\theta + 2\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \quad \frac{1}{2}$$

$= \pi$

Scanned by CamScanner