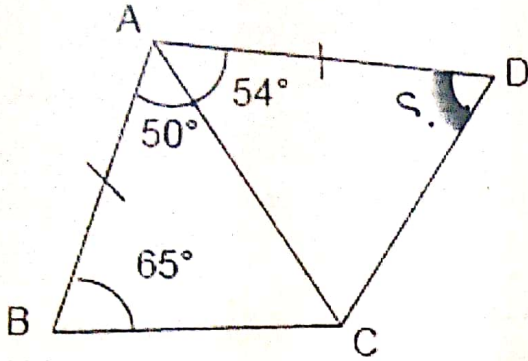


**السؤال الأول (5 درجات):**

(1) جد قياس الزاوية  $\hat{ADC}$  بحيث  $AB = AD$ .



(2) ليكن  $P, Q, R, S$  أربع نقاط في المستوى الإقليدي  $E^2$  بحيث لا تكون 3 نقاط منهم على نفس الاستقامة و ليكن كل من  $A, B, C, D$  منتصف القطع المستقيمة  $[PQ]$ ,  $[QR]$ ,  $[RS]$ , و  $[SP]$  على التوالي. بين ان  $(AB) \parallel (CD)$  و  $(AD) \parallel (BC)$  أو متطابقة.

**السؤال الثاني (10 درجات):**

نعتبر في المستوى الإقليدي  $E^2$ , النقاط التالية:  $A(0,1)$ ,  $B(1,2)$ ,  $C(2,-1)$ ,  $A'(0,0)$ ,  $B'(1,1)$  و  $C'(-2,2)$ .

(أ) اعط صيغة التناظر بالنسبة للمستقيم  $(AC)$ .

(ب) بين أن المثلثين  $ABC$  و  $A'B'C'$  متطابقان و جد صيغة التقايس الذي يحول  $ABC$  إلى  $A'B'C'$  و حدّد عناصره.

**السؤال الثالث (10 درجات):**

(1) عيّن نوع التحويلات المعرفة على المستوى الإقليدي  $E^2$  و جد عناصرها:

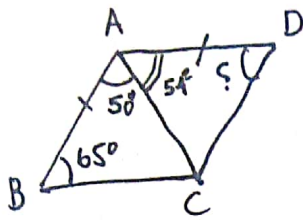
$$\phi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (أ)$$

$$\psi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (ب)$$

(2) حدّد نوع التركيب  $\psi \circ \phi$  و جد عناصره.

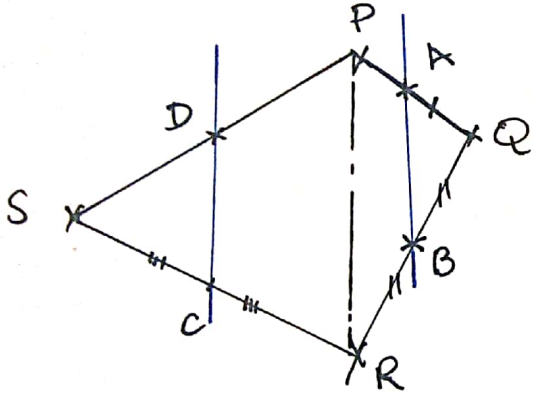
مقرر ٣٧٩ رياض (د/برطان)

السؤال الأول: (5 درجات)



2

① بالنسبة للمثلث ABC ،  
 $\hat{BAC} + \hat{ABC} + \hat{BCA} = 180^\circ$   
 $50 + 65 + \hat{BCA} = 180$   
 $\hat{BCA} = 65^\circ = \hat{ABC}$   
 وبما أن  $AC = AD$  فإن  $\hat{ADC} = \hat{ACD}$   
 يعني المثلث ACD متساوي ضلعين عندهن  $\hat{ADC} = \hat{ACD}$   
 ضلع  $\hat{ADC} = x$  لدينا  $2x + 54 = 180$  لذا  $x = 63^\circ$   
 قياس الزاوية  $\hat{ADC}$  هو  $63^\circ$ .



2

نفترض أن PQR ليس على نفس المستقيمة  
 $A = P * Q$  منتصف [PQ]  
 $B = Q * R$  منتصف [QR]

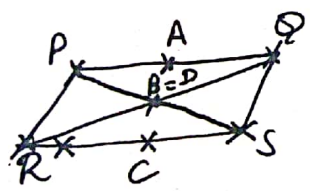
نظريّة طاليس  
 $\frac{QA}{QP} = \frac{QB}{QR} = \frac{1}{2}$

(\*)  $(AB) \parallel (PR)$   
 بنفس الطريقة للمثلث SPR  
 $C = S * R$   
 $D = S * P$   
 وبما أن  $(DC) \parallel (PR)$

3

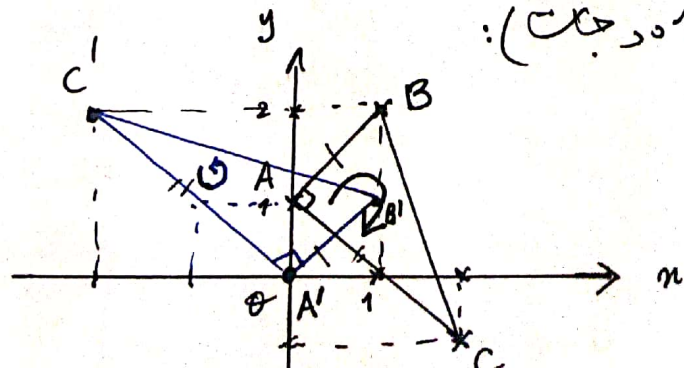
فنتنتج من خلال (\*) و (\*) أن  $(AB) \parallel (DC)$ .

$(AD) \parallel (BC) \Leftrightarrow \begin{cases} (AD) \parallel (QS), \Delta PQS \\ (BC) \parallel (QS), \Delta QRS \end{cases}$



بذوئس الطريقة للمثلثين و  
 $\Delta$  إذاً  $RS \parallel PQ$  متوازي الأضلاع  
 عندهن  $(AB) = (CD)$

السؤال الثاني (10 درجات):



(f)

$$x_C = 2; \quad x_A = 0$$

$$y_C = -1; \quad y_A = 1$$

(AC) معادلة المستقيم (f) ②

$$y - y_A = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} (x - x_A)$$

$$y - 1 = \frac{-1 - 1}{2 - 0} (x - 0)$$

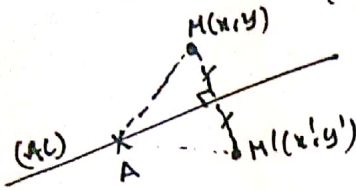
$$y - 1 = -x$$

$$\boxed{x + y - 1 = 0}$$

①

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp (AC)$$

(AC) محور (S)  $S_{(AC)}(M(x,y)) = M'(x',y') \Leftrightarrow \vec{MM}' = -2 \langle \vec{AM} | \vec{n} \rangle \vec{n}$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \frac{[(x-0) + (y-1)]}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x - x - y + 1 \\ y' = y - x - y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$$

②

صيغة الناظر بالنسبة للمستقيم (AC).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A'B' = \sqrt{2}$  وبالتالي  $\vec{A'B'} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$   $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (ب)  
 $A'C' = 2\sqrt{2}$  وبالتالي  $\vec{A'C'} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$   $AC = \|\vec{AC}\| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \vec{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$   
 $(A'B') \perp (A'C') \Leftrightarrow \langle \vec{A'B'} | \vec{A'C'} \rangle = 0$   $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \langle \vec{AB} | \vec{AC} \rangle = 0$  نرى ان  
 و بالتالي المثلثين  $A'B'C'$  و  $ABC$  متطابقين.

①

$$M_1^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

$$A = M_2 M_1^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

مصفوفة التناقص  $\varphi$

$$\varphi(M(x,y)) = M'(x',y') \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(A) = A' \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4)

(3)

$$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\varphi}^T A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$$

$$|A_{\varphi}| = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

و بالتالي التقياس  $\varphi$  هو انعكاس  $\rightarrow$  بما ان محاوره  
بما انزلاقية.  
 ندرس النقاط الثابتة:

$$L = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \varphi(M) = M\} \text{ نضع}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

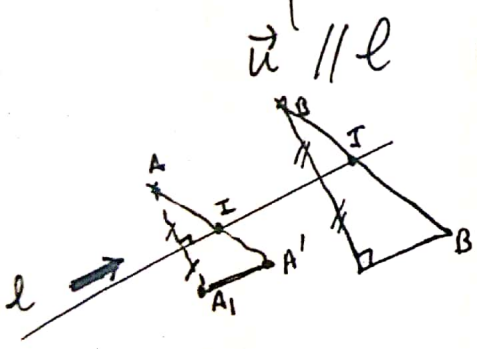
$$\begin{cases} x = x-1 \\ 0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ y = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ x \end{pmatrix}$$

و بالتالي  $L = \emptyset$

بني  $\varphi$  هو انعكاس انزلاقية  $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_l$

حيث  $\begin{cases} I = \varphi(A) * A \\ J = \varphi(B) * B \end{cases}$  فان  $\begin{cases} A' = \varphi(A) \\ B' = \varphi(B) \end{cases}$  يمان  $l$  يمر من  $I$  و  $J$



$$I = \left( \frac{x_A + x_{A'}}{2}, \frac{y_A + y_{A'}}{2} \right) = \left( 0, \frac{1}{2} \right)$$

$$J = \left( \frac{x_B + x_{B'}}{2}, \frac{y_B + y_{B'}}{2} \right) = \left( 1, \frac{3}{2} \right)$$

$$l: y - \frac{1}{2} = \frac{3/2 - 1/2}{1 - 0} (x - 0)$$

$$y - \frac{1}{2} = x \Rightarrow \boxed{x - y + \frac{1}{2} = 0}$$

(3)

$$t_{2\vec{u}}(A) = \varphi(\varphi(A)) \quad t_{2\vec{u}} = \varphi \circ \varphi$$

$$= \varphi(A')$$

$$= \varphi(0,0) = (-1,0) = h$$

$$2\vec{u} = \vec{Ah} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

4

السؤال الثالث (10 درجات)

1 كل من  $\varphi$  و  $\psi$  هم تحويلات تألفتة على  $\mathbb{E}^2$

$A_\psi = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  و  $A_\varphi = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$  مصفوفات

$A_\varphi^T \cdot A_\varphi = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = Id_{\mathbb{E}^2}(\varphi)$

و بالتالي  $\varphi$  هو تقايس على  $\mathbb{E}^2$

1

$|A_\varphi| = \frac{1}{25} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{25} (-25) = -1$

و بالتالي  $\varphi$  هو انعكاس

حل صورة  
انزلاتي (تحصيل انعكاس حول محور وانعكاس)  
ندرس النقاط الثابتة نضع

$\Lambda = \{M(x,y) / \varphi(M) = M\}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(3x+4y+12) \\ y = \frac{1}{5}(4x-3y-6) \end{cases}$

$(\Rightarrow) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x-2y=6 \\ x-2y=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4y=12 \\ -4x+8y=-6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 3x+4y+12 \\ 5y = 4x-3y-6 \end{cases}$

و بالتالي  $\Lambda = \emptyset$

لذا  $\varphi$  هو انعكاس وانعكاس حول نقطة  
(Glide reflection)  $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_l = S_l \circ t_{\vec{u}}$

$l = (IJ)$

$I = O \times O'$  نضع  $O' = (\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}) = \varphi(O,0) = \varphi(O)$   
 $J = A \times A'$   $A' = (\frac{19}{5}, -1) = \varphi(1,1) = \varphi(A)$

3

$I = (\frac{12}{10}, -\frac{6}{10}) = (\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$   
 $J = (\frac{24}{10}, 0) = (\frac{12}{5}, 0)$

$y - 0 = \frac{0 + \frac{3}{5}}{\frac{12}{5} - \frac{6}{5}} (x - \frac{12}{5})$

$y = \frac{1}{2} (x - \frac{12}{5}) \Rightarrow$

$x - 2y - \frac{12}{5} = 0$

$\vec{u} = \frac{36}{25} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  و بالتالي

$t_{2\vec{u}}(O) = \varphi \circ \varphi(O) = \varphi \circ \varphi(O,0)$   
 $= \varphi(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5})$   
 $= (\frac{72}{25}, \frac{36}{25})$

$$A_{\psi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A_{\psi}^T A_{\psi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$$

و این نشان می‌دهد که  $\psi$  متعامد است

①

$$|A_{\psi}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{یعنی}$$

فاز  $\psi$  به دوران  $\psi = R(\alpha, \theta)$  مرکز  $\alpha$  و زاویه  $\theta$ .

$$\text{tr } A_{\psi} = \sqrt{2} = 2 \cos \theta \quad \text{لینا}$$

①

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi(\alpha) = \alpha ; \alpha(x_0, y_0) \text{ مرکز}$$

$$\begin{cases} 2x_0 = \sqrt{2}x_0 - \sqrt{2}y_0 + 2 - 2\sqrt{2} \\ 2y_0 = \sqrt{2}x_0 + \sqrt{2}y_0 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 - y_0) + 1 - \sqrt{2} \\ y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 + y_0) - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-\sqrt{2})x_0 + \sqrt{2}y_0 = 2(1-\sqrt{2}) \\ -\sqrt{2}x_0 + (2-\sqrt{2})y_0 = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 2-\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{vmatrix} = (2-\sqrt{2})^2 - 2 \neq 0$$

$$= 4 + 2 - 4\sqrt{2} + 2 = 4(2-\sqrt{2})$$

$$y_0 = \frac{1}{4(2-\sqrt{2})} \begin{vmatrix} 2-\sqrt{2} & 2(1-\sqrt{2}) \\ -\sqrt{2} & -2 \end{vmatrix}$$

$$y_0 = \frac{-2(2-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{4(2-\sqrt{2})}$$

$$x_0 = \frac{1}{4(2-\sqrt{2})} \begin{vmatrix} 2(1-\sqrt{2}) & \sqrt{2} \\ -2 & 2-\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$x_0 = \frac{1}{4(2-\sqrt{2})} [2(1-\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}]$$

$$x_0 = \frac{4(2-\sqrt{2})}{4(2-\sqrt{2})} = 1$$

②

$$y_0 = \frac{-8 + 4\sqrt{2}}{4(2-\sqrt{2})} = -1$$

$$\boxed{\alpha = (1, -1)} \text{ مرکز دوران}$$

① (تحویل انعکاس اثر لایب)  $h = \psi \circ \varphi$  مع دوران  $\psi$  و انعکاس  $\varphi$

②

$$M'(x', y') = h(M(x, y)) = \varphi(\varphi(x, y))$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{5}(3x+4y+12); \frac{1}{5}(4x-3y-6)\right)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x+4y+12 \\ 4x-3y-6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} 3x+4y+12-4x+3y+6 \\ 3x+4y+12+4x-3y-6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} -x+7y+18 \\ 7x+y+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{18\sqrt{2}}{10} + 1 - \sqrt{2} \\ \frac{6\sqrt{2}}{10} - 1 \end{pmatrix}$$

- ندرس النقاط الثابتة لـ  $h$  :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{10}(-x+7y) + \frac{9}{5}\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{10}(7x+y) + \frac{3\sqrt{2}}{5} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{10}{\sqrt{2}}x = -x+7y + \frac{10}{\sqrt{2}}\left(\frac{9}{5}\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}\right) \\ \frac{10}{\sqrt{2}}y = 7x+y + \frac{10}{\sqrt{2}}\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} - 1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{10}{\sqrt{2}}\right)x - 7y = 18 + \frac{10}{\sqrt{2}} - 10 = 8 + \frac{10}{\sqrt{2}} \\ -7x + \left(\frac{10}{\sqrt{2}} - 1\right)y = 6 - \frac{10}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

①

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{10}{\sqrt{2}} & -7 \\ -7 & \frac{10}{\sqrt{2}} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} -7 & 8 + \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} - 1 & 6 - \frac{10}{\sqrt{2}} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{المصفوفة العكسية}}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}+10} & \frac{10+8\sqrt{2}}{\sqrt{2}+10} \\ -7 & \frac{10}{\sqrt{2}} - 1 & 6 - \frac{10}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

دعني نكسر  
الكسور لتزول

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}+10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} -\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}+10} & \frac{10+8\sqrt{2}}{10+\sqrt{2}} \\ 0 & 6 - \frac{10}{\sqrt{2}} + \frac{70+56\sqrt{2}}{\sqrt{2}+10} \end{array} \right]$$

$$= \frac{12+60\sqrt{2}-10\sqrt{2}-100+70\sqrt{2}+110}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+10)} \quad 12 \neq 0$$