جامعـــــة الملك سعـــــود	كليـــة العلـــــوم	قســـم الريـــاضيــــــــــات

الفصل الأول **1434-1435** هـ / **487**-ريض / الاختبار الشهري الثاني / الزمن: ساعتان

الجزء الأوّل (18 درجة) (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

1) اذكر نظرية كوشي, ثم احسب التكامل $I_1 = \oint_{|z-1-i|=1} Log\ z\ dz$.

2) احسب التكامل $I_2 = \int_{\Gamma} \left(|z-1+i|^2 - z \right) dz$ حيث Γ عبارة عن نصف الدائرة $z(t) = 1 - i + e^{it}, 0 \le t \le \pi$.

3) باستعمال صيغة كوشي التكاملية, بيّن أن : $I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

4) إذا كانت $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus |z| = 1\}$ دائرة الوحدة فبيّن أن : $\left| \oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz \right| \le 2\pi e$.

5) لتكن f دالة كلية بحيث $|f(z)| \le \sqrt{|z|}$ لكل $z \in \mathbb{C}$. بيّن أن: $f \equiv 0$ على $\mathbb{C}$.

6) لتكن f دالة تحليلية على نطاق (مفتوح ومترابط) محدود $D \subset \mathbb{C}$, متصلة على المغلق $\bar{D}$, غير ثابتة بحيث $|f| = cst$ على الحافة bD. فاثبت أن f لها صفر داخل D .

الجزء الثاني (7 درجات):

لتكن $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ دالة تحليلية على القرص $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < r\}$ حيث $r > 1$. باستعمال التكامل $I = \oint_{|z|=r} \left(\frac{1}{z^2} + 1 + \frac{2}{z} \right) f(z)\, dz$ احسب التكامل التالي بدلالة $f(0)$ و $f'(0)$

$$J = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta .$$

و الله ولي التوفيـــــق

لا يكتب في هذا الهامش

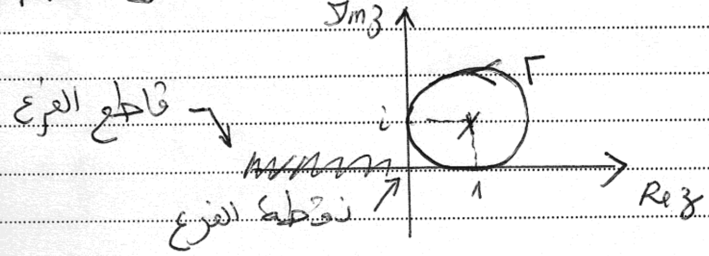
إصلاح الاختبار الشهري الثاني ٤٨٧ ريض
للفصل الأول ١٤٣٤/١٤٣٥هـ

الجزء الأول (18 درجة)

① نظرية كوشي: لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في نطاق D ولتكن $f'(z)$ متصلة في D.
1 فانه من أجل أي مسار مغلق وبسيط Γ في D لدينا

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=0$$

- الفرع الرئيسي للدالة اللوغاريتمية (الذي يرمز له بالرمز $\operatorname{Log} z$) تكون تحليلية على النطاق $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

2 

الدائرة $|z-(1+i)|=1$ تقع كليا داخل $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ وهي تحقق شروط نظرية كوشي وبالتالي

$$I_1=\oint_{|z-1-i|=1} \operatorname{Log} z = 0$$

② من التمثيل الوسيطي للمسار Γ نلاحظ أن:

1 $$|z-1+i|^2=|e^{it}|^2=1$$

وبالتالي $$I_2=\int_{\Gamma}(1-z)\,dz$$

$0\le t\le \pi$; $z(t)=1-i+e^{it}$

1 $1-z=i-e^{it}$ $\quad dz=ie^{it}\,dt$

لا يكتب في هذا الهامش

$$I_2 = \int_0^{\pi} (i - e^{it})\, i e^{it}\, dt$$

(1)

$$= \int_0^{\pi} \left(-e^{it} - i e^{2it}\right) dt$$

$$= \left[i e^{it} - \frac{1}{2} e^{2it} \right]_0^{\pi} = \left(-i - \frac{1}{2}\right) - \left(i - \frac{1}{2}\right) = -2i$$

(3) بما أن $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ نضع $z(\theta) = e^{i\theta}$

$$dz = i e^{i\theta} d\theta = i z\, d\theta$$

(1)

فإن $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ $\qquad \sin\theta = \dfrac{z - 1/z}{2i} = \dfrac{z^2 - 1}{2iz}$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{2 + \left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2\,dz}{z^2 + 4iz - 1} = 2 \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z - z_1}}{z - z_2}\, dz$$

(1)

$$z^2 + 4iz - 1 = 0$$

$a = 1$; $b = 4i$; $c = -1$

$$\Delta = (4i)^2 - 4 \times 1 \times -1 = -12 = (2\sqrt{3}\, i)^2$$

$$z_1 = \frac{-4i - 2\sqrt{3}i}{2} = -(2 + \sqrt{3})\, i$$

$$z_2 = \frac{-4i + 2\sqrt{3}i}{2} = (\sqrt{3} - 2)\, i$$

بما أن $|z_1| > 1$ و $|z_1 . z_2| = |-1|$ فإن $|z_2| < 1$

(1)

الدالة $\dfrac{1}{z - z_1}$ تحليلية داخل قرص الوحدة

باستخدام صيغة كوشي التكاملية، نحصل على أن

١

$$I_3 = 2 \times 2\pi i \, \frac{1}{z_2 - z_1}$$

$$= 4\pi i \, \frac{1}{(\sqrt{3}-2)i + (\sqrt{3}+2)i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

④ على دائرة الوحدة C لدينا $|z| = 1$ وبالتالي

فإن $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$\left|\frac{\sin z}{z^2}\right| = \frac{|\sin z|}{|z|^2} = |\sin z| = \left|\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2i}\left(|e^{iz}| + |e^{-iz}|\right)$$

لأن $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = e^{-y}$ و $|e^{-iz}| = |e^{-ix+y}| = e^{y}$

2 كذلك على دائرة الوحدة لدينا $|y| \leq 1$ لذا فإن

$$1/e \leq e^{-y} \leq e \quad \text{و} \quad e^{-1} \leq e^{y} \leq e^{1}$$

ومنه

$$\left|\frac{\sin z}{z^2}\right| \leq \frac{1}{2i}\left(|e^{iz}| + |e^{-iz}|\right) \leq \frac{1}{2}(e+e) = e$$

ومنه نستنتج أن

$$\left|\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\, dz\right| \leq \int_{|z|=1} \left|\frac{\sin z}{z^2}\right| |dz| \leq e\,\underbrace{\left(\oint_{|z|=1} |dz|\right)}_{\text{طول المسار}}$$

فإن

$$\left|\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\, dz\right| \leq 2\pi e$$

⑤ نستخدم متباينة كوشي:

بما أن f كلية لكل r نأخذ دائرة مركزها 0 ونصف قطرها r

على الدائرة $C(0,r)$ لدينا $|f(z)| \leq \sqrt{|z|} = \sqrt{r}$

فإن: $|f^{(n)}(0)| \le \frac{\sqrt{r}\, n!}{r^n}$ لكل $n\in\mathbb{N}$

$n=1$: $|f'(0)| \le \frac{1}{\sqrt{r}}$ ، $|f''(0)| \le \frac{2}{r^{3/2}}$ ، ... ، ...

عندما $r \to \infty$ ، $|f^{(n)}(0)| \le 0$ لكل $n \ge 1$ 3

يعني $f^{(n)}(0)=0$ لكل $n \ge 1$ وبما أن $f(0)=0$

فنستنتج أن $f \equiv 0$ على $\mathbb{C}$.

6 نستخدم طريقة البرهان بالتناقض.

نفترض أن f ليس لها صفر داخل D (يعني لكل $z \in D$ ، $f(z) \neq 0$) وبما أن f تحليلية على D فإن الدالة $\frac{1}{f}$ أيضا تحليلية على D.

نستخدم الآن مبدأ القيمة العظمى والصغرى للمقياس: 3

$$\min_{D} |f(z)| = \min_{bD} |f(z)| = cst$$

كذلك

$$\max_{D} |f(z)| = \max_{bD} |f(z)| = cst$$

بما أن

$\min_{D} |f| = \max_{D} |f|$ فإن

f هي دالة ثابتة على D (لأن f تحليلية)

يعني يوجد عدد مركب w بحيث $f(z)=w$ لكل $z \in D$.

لا يكتب في هذا الهامش

الجزء الثاني (7 درجات)

$$I=\oint_{|z|=r}\left(\frac{1}{z^2}+1+\frac{2}{z}\right)f(z)\,dz$$

$$=\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}\,dz+\oint_{|z|=r}f(z)\,dz+2\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}\,dz$$

بما أن f تحليلي على $|z|<r$ حيث $r>1$ فإن

$$\oint_{|z|=1}f(z)\,dz=0 \quad \text{(نظرية كوشي)}$$

(3) $$\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}\,dz=2\pi i\,f(0) \quad \text{(صيغة كوشي التكاملية)}$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}\,dz=2\pi i\,f'(0) \quad \text{(صيغة تعميم كوشي التكاملية)}$$

فإن $\oint_{|z|=1}\left(\frac{1}{z^2}+1+\frac{2}{z}\right)f(z)\,dz=2\pi i\,f'(0)+4\pi i\,f(0)$

تمثيل وسيطي للدائرة الوحدة $z(\theta)=e^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

$$\int_0^{2\pi}\cancel{i}e^{i\theta}\left(\frac{1}{e^{i2\theta}}+1+\frac{2}{e^{i\theta}}\right)f(e^{i\theta})\,d\theta=2\pi\cancel{i}\left(f'(0)+2f(0)\right)$$

(2) $$\int_0^{2\pi}\left(e^{-i\theta}+e^{i\theta}+2\right)f(e^{i\theta})\,d\theta=2\pi\left(f'(0)+2f(0)\right)$$

(1) $$\int_0^{2\pi}\left(2\cos\theta+2\right)f(e^{i\theta})\,d\theta=4\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

(متطابقة ضعف الزاوية)

فنستنتج أن

(1) $$\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=\pi f(0)+\frac{\pi}{2}f'(0).$$