جامعة الملك سعود — كلية العلوم — قسم الرياضيات

الفصل الأول **1433–1434** هـ/487-ريض/ الاختبار الثاني/ الزمن: ساعتان

السؤال الأوّل (5 درجات): ليكن γ مسار بسيط مغلق موجه في الاتجاه الموجب و $a,b \in \mathbb{C}$ عددين مركبين مختلفين داخل γ. لتكن f دالة كلية (تحليلية على $\mathbb{C}$).

أ) احسب قيمة التكامل: $\oint_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$.

ب) استنتج قيمة التكامل: $\oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)}$.

ج) نفترض الآن أن الدالة f محدودة على $\mathbb{C}$، باستخدام ب) بيّن أن f هي دالة ثابتة.

السؤال الثاني (6 درجات): إذا كانت $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دالة تحليلية على القرص الوحدة المفتوح $D=\{z\in\mathbb{C}, |z|<1\}$ و لكل $z\in D$ ، $|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$.

أ) أثبت أن: لكل $n\in\mathbb{N}$ ولكل $0<R<1$ ، $|f^{(n)}(0)| \le \frac{n!}{R^n(1-R)}$.

ب) بيّن أن الحد العلوي يكون أصغر ما يمكن عندما تكون $R=\frac{n}{n+1}$.

ج) استنتج أن: لكل $n\in\mathbb{N}$ ، $|a_n| \le (1+\frac{1}{n})^n(n+1) < e(n+1)$.

السؤال الثالث (8 درجات):

1) أثبت أن: لكل $0<r<R$ ، $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\,d\theta = \Re e\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{R+z}{R-z}\frac{dz}{z}\right)$.

2) بيّن أن: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\,d\theta=1$.

3) استنتج قيمة التكامل: $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$ لكل $a\neq\pm1$.

السؤال الرابع (6 درجات):

(1) لتكن f دالة تحليلية على نطاق (مفتوح و مترابط) محدود $\Omega\subset\mathbb{C}$، متصلة على المغلق $\overline{\Omega}$، غير ثابتة، بحيث $|f|=cst$ على الحافة $b\Omega$. فاثبت أن f لها صفر داخل Ω.

(2) أوجد القيمة العظمى للمقياس $|z^2+3z-1|$ على القرص الوحدة المغلق $|z|\le1$.

د. برهان

إصلاح الاختبار الشهري الثاني ٤٨٧ ريض
الفصل الأول ١٤٣٣ - ١٤٣٤هـ

السؤال الأول: (5 درجات)

أ) $$g(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} \quad ; \quad a \neq b$$

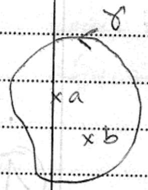
1 $$A = \lim_{z \to a} (z-a)\, g(z) = \lim_{z \to a} \frac{1}{z-b} = \frac{1}{a-b}$$

$$B = \lim_{z \to b} (z-b)\, g(z) = \lim_{z \to b} \frac{1}{z-a} = \frac{1}{b-a}$$

إذن $$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right]$$

بما أن a,b تقع داخل γ باستخدام نظرية كوشي التكاملية

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)}\, dz = \frac{1}{a-b}\left[\oint_\gamma \frac{dz}{z-a} - \oint_\gamma \frac{dz}{z-b}\right]$$



1 $$= \frac{1}{a-b}\left[2\pi i - 2\pi i\right] = 0$$

ب) بما أن f تحليلية على $\mathbb{C}$ فإن

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = \frac{1}{a-b}\left[\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-b}\, dz\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[2\pi i\, f(a) - 2\pi i\, f(b)\right]$$

1 $$= 2\pi i \left[\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right]$$

ج) بما أن f محدودة على $\mathbb{C}$ إذن يوجد $M>0$ بحيث

$|f(z)| \leq M$ لكل $z \in \mathbb{C}$.

نأخذ γ دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها R

(بحيث $R >> 1$ كبير جداً) إذن $0 < |a-b| < 2R$

$$\left|\oint_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz\right| = \left|2\pi i\left[\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right]\right|$$

$$\leq 2\pi\, \frac{|f(a)|+|f(b)|}{|a-b|}$$

(1)

$$\leq \frac{4\pi M}{|a-b|}$$

نضع $r=|a-b|>0$. عندما $r\to\infty$

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = 0$$

(1)

إذن $f(a)=f(b)$

يعني أن الدالة f هي دالة ثابتة على $\mathbb{C}$

<u>السؤال الثاني</u> (6 درجات)

أ) نأخذ $0<R<1$ و نأخذ γ الدائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها R . باستخدام الكون تعميم صيغة كوشي التكاملية

لكل $n\in\mathbb{N}$ ؛ $$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

(1)

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^{n+1} e^{i(n+1)\theta}}\, iRe^{i\theta}\, d\theta$$

لأن $|f(z)|\leq \frac{1}{1-|z|}$ ، $$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-R)R^{n+1}}\, R\, d\theta$$

(1) لكل $n\in\mathbb{N}$ $$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{R^n(1-R)}$$

ب) نضع $\varphi(R)=R^n(1-R)$ حيث $0<R<1$ و $n\in\mathbb{N}$

(1) $$\varphi'(R) = nR^{n-1}(1-R) - R^n = nR^{n-1} - nR^n - R^n$$

$$= R^{n-1}\left[n-nR-R\right] = R^{n-1}\left[n-(n+1)R\right]$$

لا يكتب في هذا الهامش

$$\varphi'(R)=0 \Leftarrow n-(n+1)R=0$$

إذن $R=\dfrac{n}{n+1}$

R	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$\varphi'(R)$	$+$	0	$-$
$\varphi(R)$	$0 \nearrow$		$\searrow 0$

(1)

إذن الحد العلوي للمتباينة $|f^{(n)}(0)| \le \dfrac{n!}{R^n(1-R)}$ يكون

أصغر ما يمكن عندما تكون $R=\dfrac{n}{n+1}$

ج)

نعلم أن $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ فإن

(1)

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \le \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}$$ لكل $n\in\mathbb{N}$

$$|a_n| \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)$$ لكل $n\in\mathbb{N}$

(1)

نعلم أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ و $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

متتالية تزايدية

إذن لكل $n\in\mathbb{N}$ ، $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$

فنجد أن

$$|a_n| < e(n+1)$$ لكل $n\in\mathbb{N}$

السؤال الثالث (8 درجات)

(1) أ) خذ $0<r<R$ ، بما أن $|z|=r$ فإن $z=re^{i\theta}$

$$dz=ire^{i\theta}d\theta$$

$$\frac{R+z}{R-z}=\frac{R+re^{i\theta}}{R-re^{i\theta}}=\frac{(R+re^{i\theta})(R-re^{-i\theta})}{(R-re^{i\theta})(R-re^{-i\theta})}$$

$$(R-re^{i\theta})(R-re^{-i\theta})=R^2-rRe^{-i\theta}-rRe^{i\theta}+r^2$$
$$=R^2-2Rr\cos\theta+r^2,\quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$(R+re^{i\theta})(R-re^{-i\theta}) = R^2 - Rre^{-i\theta} + Rre^{i\theta} - r^2$$ 1

$$= R^2 - r^2 + Rr(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$= R^2 - r^2 + i2Rr\sin\theta$$

لأن $|z|=r$

$$\frac{R+z}{R-z} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2} + i\,\frac{2Rr\sin\theta}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}$$ 1

$$\oint_{|z|=r} \frac{R+z}{R-z}\,\frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{R+re^{i\theta}}{R-re^{i\theta}}\,\frac{ire^{i\theta}\,d\theta}{re^{i\theta}}$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{R+re^{i\theta}}{R-re^{i\theta}}\,d\theta$$

$$= i\left[\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\,d\theta + i\int_0^{2\pi} \frac{2Rr\sin\theta}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\,d\theta\right]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{R+z}{R-z}\,\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2Rr\sin\theta}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\,d\theta$$

بأخذ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\,d\theta = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{R+z}{R-z}\,\frac{dz}{z}\right)$$ 1

~~نضع~~ $g(z) = \dfrac{R+z}{(R-z)z}$ حيث $R>|z|$. 2

$g(z) = \dfrac{A}{R-z} + \dfrac{B}{z}$, $z\neq 0,\ z\neq R$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{0,R\}$

- $A = \lim\limits_{z\to R} (R-z)\,g(z) = \lim\limits_{z\to R} \dfrac{R+z}{z} = 2$ 1
- $B = \lim\limits_{z\to 0} z\,g(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{R+z}{R-z} = 1$

$$g(z) = \frac{2}{R-z} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{R+z}{R-z}\,\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\left[\frac{2}{R-z}+\frac{1}{z}\right]dz$$

(2)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{R+z}{R-z}\,\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{|z|=r}\frac{2}{R-z}\,dz+\oint_{|z|=r}\frac{dz}{z}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{R+z}{R-z}\,\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}\left[\,0+2\pi i\,\right]=1$$

إذن $\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\,d\theta=1 \quad 0<r<R$

(3) نأخذ $a\neq\pm1$

* إذا كان $0<|a|<1$;

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-a^2}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta=1$$

(1) إذن

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{2\pi}{1-a^2}$$

* الآن إذا كان $|a|>1$ فإن $r=\left|\frac{1}{a}\right|<1$

(1)

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-1/a^2}{1-\frac{2}{a}\cos\theta+\frac{1}{a^2}}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-1}{a^2-2a\cos\theta+1}\,d\theta$$

فنستنتج أن $\quad \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{2\pi}{a^2-1}$

السؤال الرابع (6 درجات)

(1) نفترض أن f ليس لها صفر داخل Ω، يعني $f(z)\neq0$ لكل $z\in\Omega$

باستخدام مبدأ القيمة الصغرى للمقياس فإن

(1)

$$\min_{\Omega}|f(z)|=\min_{b\Omega}|f(z)|=\text{cst}$$

وباستخدام مبدأ القيمة العظمى للمقياس فإن

(1)

$$\max_{\Omega}|f(z)|=\max_{b\Omega}|f(z)|=\text{cst}$$

إذن $\min\limits_{\Omega} |f(z)| = \max\limits_{\Omega} |f(z)| = cst$

هذا يؤدي إلى أن لكل $z \in \Omega$, $|f(z)| = cst$ 1

بما أن f تحليلية على نطاق Ω فإن f هي دالة ثابتة و هذا تناقض مع أن f غير ثابتة.

(2) نضع $P(z) = z^2+3z-1$ كثيرة حدود تحليلية على
فهي تحليلية على قرص الوحدة المغلق $\overline{\mathbb{D}(0,1)}$
باستخدام مبدأ القيمة العظمى

$$\max_{|z|\leq 1} |z^2+3z-1| = \max_{|z|=1} |z^2+3z-1|$$ 1

أي حين $|z|=1$ فإن $z = e^{i\theta}$

$$|z^2+3z-1|^2 = |e^{2i\theta}+3e^{i\theta}-1|^2 = |P(e^{i\theta})|^2$$

$$\begin{aligned}
|z^2+3z-1|^2 &= |(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + 3(\cos\theta + i\sin\theta) - 1|^2 \\
&= |(\cos 2\theta + 3\cos\theta - 1) + i(\sin 2\theta + 3\sin\theta)|^2 \\
&= (\cos 2\theta + 3\cos\theta - 1)^2 + (\sin 2\theta + 3\sin\theta)^2 \\
&= \cos^2 2\theta + 9\boxed{\cos^2\theta} + 1 + 6\cos 2\theta\cos\theta - 2\cos 2\theta \\
&\quad - 6\cos\theta + \sin^2 2\theta + 9\boxed{\sin^2\theta} + 6\sin 2\theta\sin\theta \\
&= 11 - 6\cos\theta + 6\underbrace{(\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta)}_{\cos(2\theta-\theta)} - 2\cos 2\theta \\
&= 11 - \cancel{6\cos\theta} + \cancel{6\cos\theta} - 2\cos 2\theta
\end{aligned}$$ 1

حين $|z|=1$: $|z^2+3z-1|^2 = 11 - 2\cos 2\theta = |P(e^{i\theta})|^2$

بما أن $-1 \leq \cos 2\theta \leq 1$; $\min\limits_{0\leq\theta\leq 2\pi} \cos 2\theta = -1$ عندما $\theta = \pm\pi/2$ 1

$$\max_{0\leq\theta\leq 2\pi} (11 - 2\cos\theta) = 13 = 11 - 2\cos(\pm\pi)$$

يعني $2\theta = \pm\pi \Leftrightarrow \theta = \pm\pi/2$ إذن $z = \pm i$.

إذن $\max\limits_{0\leq\theta\leq 2\pi} |11 - 2\cos\theta) = \max\limits_{|z|\leq 1} |z^2+3z-1| = \sqrt{13} = |P(\pm i)|$
$= |-1+3i-1| = |3i-2|.$
