جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات

الفصل الأول 1431-1432 هـ/ 385ريض / الإختبار الفصلي الثاني/ الزمن: ساعة و نصف

السؤال الأوّل (6 درجات):

احسب التكاملات $\int \bar{z}\ dz$, $\int \Im m(z)\ dz$, $\int \Re e(z)\ dz$ على المسارات التالية :

1) قطعة الخط المستقيم من 0 إلى $1-i$.

2) الدائرة $|z-a|=R$.

السؤال الثاني (6 درجات):

أثبت أن لكل $z=re^{i\theta}$ حيث $0<r<R$, لدينا: $\dfrac{R+z}{R-z}=\dfrac{R^2-r^2+2irR\sin\theta}{R^2-2rR\cos\theta+r^2}$

ثم استنتج أن: $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\ d\theta=1$.

السؤال الثالث (8 درجات):

1) ارسم المسارالمغلق $\Gamma_{r,R}$ الموجه في الاتجاه الموجب حيث $0<r<R$ المعطى بالتمثيل الوسيطي:

$$z(t)=\begin{cases} t, & t\in[r,R] \\ Re^{it}, & t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ +it, & t\in[r,R] \\ re^{it}, & t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

2) بين أن: لكل $0<t<\pi/4$ لدينا: $\sin 2t \geq \dfrac{4t}{\pi}$.

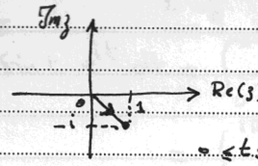
3) بمكاملة $\dfrac{e^{iz^2}}{z}$ على المسار $\Gamma_{r,R}$, استنتج أن: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}\ dx=\frac{\pi}{4}$.

و الله ولي التوفيق

إصلاح الاختبار الشهري الثاني للفصل الأول ١٤٣٢/٣/٢هـ

٣٨٥ ريض (التحليل المركب ١)

السؤال الأول :



1 التمثيل الوسيطي للقطعة

المستقيمة γ التي تربط بين 0 و $(1-i)$

هو : $z(t) = (1-i)\,t$ حيث $0 \leq t \leq 1$

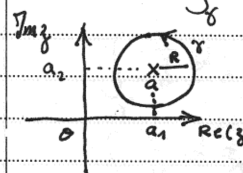
إذن $dz = (1-i)\,dt$

بما أن $z(t) = t - it$ فإن $\overline{z}(t) = t + it$

1 $$\int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz = \int_0^1 t\,(1-i)\,dt = (1-i)\int_0^1 t\,dt = \frac{1-i}{2}.$$

1 $$\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz = \int_0^1 -t\,(1-i)\,dt = (i-1)\int_0^1 t\,dt = \frac{i-1}{2}.$$

1 $$\int_\gamma \overline{z}\, dz = \int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz - i\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz = \left(\frac{1-i}{2}\right) - i\left(\frac{i-1}{2}\right) = 1$$



2 التمثيل الوسيطي للدائرة $|z-a|=R$:

هو $0 \leq t \leq 2\pi,\ z(t) = a + Re^{it}$

$a_1 = \operatorname{Re} a$, $a_2 = \operatorname{Im} a$ حيث $a = a_1 + i a_2$, $dz = iRe^{it}\,dt$; $e^{it} = \cos t + i\sin t$

$$z(t) = (a_1 + R\cos t) + i\,(a_2 + R\sin t)$$

$$\int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz = \int_0^{2\pi} (a_1 + R\cos t)\, iR e^{it}\,dt$$

$$= i a_1 R \int_0^{2\pi} e^{it}\,dt + iR^2\int_0^{2\pi} \cos t\, e^{it}\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} \cos t\, e^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} \cos t\,(\cos t + i\sin t)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt + i\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{2}\,dt.$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt - \frac{i}{2}\left[\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{i}{4}\,[1-1] = \pi.$$

$$\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt = \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{i}\,[1-1] = 0$$

1 إذن

$$\oint_{|z-a|=R} \operatorname{Re} z\, dz = i\pi R^2$$

$$\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz = \int_0^{2\pi} (a_2 + R\sin t)\, iRe^{it}\, dt$$

$$= ia_2 R \int_0^{2\pi} e^{it}\, dt + iR^2 \int_0^{2\pi} \sin t\, e^{it}\, dt$$

$$\int_0^{2\pi} \sin t\, e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} \sin t\,(\cos t + i\sin t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{2}\, dt + i\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{2\pi} + i\int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos 2t)}{2}\, dt$$

$$= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2t)\, dt = \frac{i}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= i\pi .$$

1 إذن: $\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz = -\pi R^2.$

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz - i\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz$$

1 $\int_\gamma \bar{z}\, dz = i\pi R^2 + i\pi R^2 = 2i\pi R^2.$

السؤال الثاني :

$$\frac{R+z}{R-z} = \frac{(R+z)(R-\bar{z})}{(R-z)(R-\bar{z})} \quad , \; 0<r<R \; , \; z = re^{i\theta}$$

3 $\frac{R+z}{R-z} = \frac{R^2 + Rz - R\bar{z} - |z|^2}{R^2 - R\bar{z} - Rz + |z|^2} = \frac{R^2 - |z|^2 + R(z-\bar{z})}{R^2 + |z|^2 - R(z+\bar{z})}$

بما أن $r\cos\theta = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $r\sin\theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}$; $|z|^2 = r^2$

إذن $\frac{R+z}{R-z} = \frac{R^2 - r^2 + 2iRr}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}$

$z = re^{i\theta}$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ فإن $dz = ire^{i\theta}\, d\theta$

إذن $d\theta = \frac{dz}{iz}$

2 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}\, d\theta = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{R+z}{R-z}\, \frac{dz}{z}\right)$

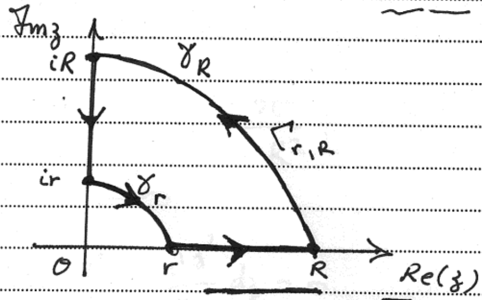
بما أن $z \xrightarrow{f} \frac{R+z}{R-z}$ تحليلية على القرص $D(0,r)$ فإن

(صيغة كوشي التكاملية) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z}\,dz = f(0) = 1$$

① نستنتج أن
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\,d\theta = 1 .$$

السؤال الثالث :

② ①



$$\Gamma_{r,R} = [r,R] \cup \gamma_R \cup [ir,iR] \cup \bar{\gamma}_r$$

② نأخذ $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$, نضع $f(t) = \sin 2t - 4t/\pi$

$f'(t) = 2\cos 2t - 4/\pi$

(تقعّر إلى الأسفل) $f''(t) = -4\sin 2t \le 0$

② $f(0)=f(\frac{\pi}{4})=0$

t	0	α	$\pi/4$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$0 \nearrow$		$\searrow 0$

إذن لكل $0\le t\le \pi/4$, $f(t)\ge 0$ يعني $\sin 2t \ge \frac{4t}{\pi}$.

③ بما أن الدالة $z\to \frac{e^{iz^2}}{z}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ فإن

① (صيغة كوشي التكاملية) $$\oint_{\Gamma_{r,R}} \frac{e^{iz^2}}{z}\,dz = 0$$

$$\oint_{\Gamma_{r,R}} \frac{e^{iz^2}}{z}\,dz = \int_r^R \frac{e^{ix^2}}{x}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i(Re^{it})^2}}{Re^{it}}\, iRe^{it}\,dt$$
$$- \int_r^R \frac{e^{i(ix)^2}}{ix}\, i\,dx - \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i(re^{it})^2}}{re^{it}}\, ire^{it}\,dt$$

$$\int_r^R \frac{e^{ix^2}-e^{-ix^2}}{x}\,dx + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin 2t}\cdot e^{iR^2\cos 2t}\,dt$$

$$-i\int_0^{\pi/2} e^{-r^2\sin 2t}\, e^{ir^2\cos 2t}\,dt=0$$

بما أن :

1 $$\left|\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin 2t}\cdot e^{iR^2\cos 2t}\,dt\right| \leq \int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin 2t}\,dt$$

$$\leq 2\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2t}\,dt \overset{2}{\leq} 2\int_0^{\pi/4} e^{-\frac{4R^2}{\pi}t}\,dt$$

$$\leq \frac{\pi}{2R^2}\left[1-e^{-R^2}\right].$$

بما أن $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1-e^{-R^2}}{R^2} = 0$

1 فإن $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz^2}}{z}\,dz = 0$

وبنفس الطريقة لدينا : $\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz^2}}{z}\,dz\right| \leq \frac{\pi}{2r^2}\left[1-e^{-r^2}\right]$

فإن $\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz^2}}{z}\,dz - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2}\left[\frac{1-e^{-r^2}}{r^2}-1\right]$; $\lim\limits_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz^2}}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}$

$\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = 1\right)$

- بما أن $\frac{e^{ix^2}-e^{-ix^2}}{2i} = \sin x^2$, نجد أن :

1 $$\int_0^\infty \frac{2i\sin(x^2)}{x}\,dx - i\frac{\pi}{2} = 0$$

يعني $$\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$