جامعة الملك سعود   كلية العلوم   قسم الرياضيات

الفصل الصيفي 1432-1433 هـ / 385 ريض / الاختبار الشهري / الزمن: ساعتان

الجزء الأوّل (اختر 6 أسئلة فقط $6 \times 4.5 = 27$ درجة) :

١) أوجد القيم التالية: $(1+i)^i$, $\sqrt{i-1}$, $\mathrm{Arg}(-1+i\sqrt{3})$.

٢) أوجد قيم العدد المركّب z في التي تحقق: $\mathrm{Log}(z^2-1)=\frac{\pi i}{2}$.

٣) بين أن: $\sinh z = -i\sin(iz)$.

٤) ليكن a و b عددان مركّبان بحيث $\bar{a}b \neq 1$ بين أن $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$ إذا و فقط إذا كان $|a|=1$ أو $|b|=1$.

٥) أوجد حلول المعادلة: $z^4 = -z^{-1}$.

٦) بيّن انه إذا كانت $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ دالة كليّة و كانت $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ فان $g(z)$ أيضا كلية، (ضع $z=\overline{w}$ و استعمل الصيغة $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ لمعادلتي كوشي – ريمان).

٧) صنف الأصفار و النّقاط الشّاذة (في $\mathbb{C}$) للدالة $f(z)=\frac{e^z-1}{z(z-1)}$، ما نوع النقطة الشّاذة عند ∞ لـ $f(z)$ ؟

٨) لنفترض أنّ كلّ من الدالتين $f(z)$ و $\overline{f(z)}$ تحليليّة على النّطاق D بيّن أن $f(z)$ حتما ثابتة على D .

٩) جد عبارة لوغاريتميّة للدالة $\cos^{-1}z$ ثمّ احسب $\frac{d\cos^{-1}z}{dz}$ موضحا كل خطوات الحل.

الجزء الثاني (اختر سؤال فقط من بين هذه الأسئلة :)

السؤال الأول (13 درجة):

لتكن $u(x,y) = e^x \sin y$

١) بيّن أن $u(x,y)$ توافقيّة على $\mathbb{R}^2$ ثم أوجد مرافقة توافقيّة $v(x,y)$ لها.

٢) استنتج وجود دالّة كليّة $f(z)$ جزؤها الحقيقي $\Re e f(x+iy)=u(x,y)$. أوجد عبارة لـ $f(z)$ بدلالة z ثمّ اكتب على الصّيغة القطبيّة.

السؤال الثاني (13 درجة):

١) بيّن انّه يمكن صياغة معادلتي كوشي ريمان على الشّكل $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)=0$ حيث $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

٢) بيّن أن الشكل القطبي لمعادلتي كوشي– ريمان هو:

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}.$$

٣) بيّن انه إذا كانت $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ دالة كليّة بحيث $|f(z)|=c$, c ثابت فانّ $f(z)$ دالة ثابتة (يمكن استخدام السّؤال الأول أعلاه).

لا يكتب هنا الهـ

د. برهان

إصلاح الاختبار الشهري للفصل الصيفي
١٤٣١ - ١٤٣٢ هـ

الجزء الأول :

١) • $1+i=\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, $(1+i)^i=\left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^i$

$= (\sqrt{2})^i\, e^{-\pi/4}$

ونعلم أن $(\sqrt{2})^i = e^{i\ln\sqrt{2}}$

$(1+i)^i = e^{-\pi/4+i\ln\sqrt{2}}$

1,5 د

$= e^{-\pi/4}\left[\cos(\ln\sqrt{2})+i\sin(\ln\sqrt{2})\right]$

• $\sqrt{i-1} = (i-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(i-1)}$

$\log(i-1) = \ln|i-1| + i\arg(i-1)$

$i-1=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$; $\cos(\arg(i-1)) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$|i-1|=\sqrt{2}$ $\sin(\arg(i-1)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1,5 د

إذن $\arg(i-1)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

$\log(i-1) = \sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)$

$\sqrt{i-1} = e^{\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right]} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left[\frac{3\pi}{8}+k\pi\right]}$

• $-1+i\sqrt{3} = 2\left[-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; نضع $\theta = \mathrm{Arg}(-1+i\sqrt{3})$

1,5 د

$\cos\theta = -1/2$
$\sin\theta = \sqrt{3}/2$ $\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \in [-\pi,\pi]$

إذن $\mathrm{Arg}(-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

٢) $\mathrm{Log}(z^2-1) = \frac{\pi i}{2}$; $\mathrm{Log}\,U = \ln|U| + i\,\mathrm{Arg}\,U$
$-\pi < \mathrm{Arg}\, u < \pi$

$e^{\mathrm{Log}(z^2-1)} = e^{\pi i/2} = i$

1,5 د

$z^2-1 = i$

$z^2 = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z = \pm 2^{1/4} e^{i\frac{\pi}{8}}$

$S_c = \left\{\pm \sqrt[4]{2}\; e^{i\pi/8}\right\}$

٣) $\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

لا يكتب في هذا الهامش

$$\sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}$$

$$-i\sin(iz) = -i\left[\frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}\right] = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

إذن $-i\sin(iz) = \sinh z$ لكل $z \in \mathbb{C}$

ج) نأخذ $a, b \in \mathbb{C}$ بحيث $\bar{a}b \neq 1$ ،

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1 \iff \left(\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right)\overline{\left(\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right)} = 1$$

$$\iff \left(\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right)\left(\frac{\bar{a}-\bar{b}}{1-a\bar{b}}\right) = 1$$

$$\iff |a|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b + |b|^2 = (1-\bar{a}b)(1-a\bar{b})$$

$$\iff |a|^2 - \cancel{a\bar{b}} - \cancel{\bar{a}b} + |b|^2 = 1 - \cancel{a\bar{b}} - \cancel{\bar{a}b} + |a|^2|b|^2$$

$$\iff -|a|^2 - |b|^2 + |a|^2|b|^2 + 1 = 0$$

$$\iff (|a|^2 - 1)\,(|b|^2 - 1) = 0$$

$$\iff |a|^2 = 1 \quad \text{أو} \quad |b|^2 = 1$$

$$\iff |a| = 1 \quad \text{أو} \quad |b| = 1$$

د) $z^4 = -\frac{1}{z} = -z^{-1}$ ، $z \neq 0$

يعني $z^5 = -1$

نضع $z = re^{i\theta}$; $-1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$

$$z^5 = r^5 e^{i5\theta} = e^{i(\pi + 2k\pi)}$$

إذن

$$\begin{cases} r^5 = 1 \\ 5\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \qquad 0 \le k \le 4$$

$$z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}} \quad ; \quad \begin{cases} r = 1 \\ \theta_k = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{i\left(\frac{2k+1}{5}\right)\pi} \; ; \; 0 \le k \le 4 \right\}.$$

6) $$\frac{\partial g(z)}{\partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z}\overline{f(\bar z)}$$

نضع $w=\bar z$ $$\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z) = \frac{\partial}{\partial w}\overline{f(w)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z) = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar w}(w)\right)}$$

بما أن f تحليلية فإن $\frac{\partial f}{\partial \bar w}=0$.

ونستنتج أن $\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z)=0$. يعني أن الدالة g هي كلية.

7) $f(z)=\frac{e^z-1}{z(z-1)}$ تحليلية على $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

إذن $\{0,1\}$ هي نقاط شاذة.

أصفار f : $f(z)=0 \iff e^z=1 \iff z_k=\log 1=2ik\pi$

$$S_f=\{2ik\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\}$$

- بما أن $\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=e-1$ فإن $z=1$ هو قطب بسيط. $\left(\lim_{z\to1}|f(z)|=\infty\right)$.

- بما أن $\lim_{z\to0} z f(z)=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z-1}=0$; $\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z(z-1)}=\left(\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}\right)\left(\lim_{z\to0}\frac{1}{z-1}\right)$

$= 1\times(-1)=-1$

إذن $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة.

- النقطة ∞ هي نقطة معزولة شاذة.

$$g(z)=f(1/z)=\frac{e^{-1/z}-1}{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}-1\right)}=\frac{z^2\left(e^{-1/z}-1\right)}{1-z}$$

$z=0$ هي نقطة أساسية للدالة $h(z)=e^{-1/z}$

لأن $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=\infty$

فنستنتج أن $z=0$ هي أيضا نقطة أساسية لـ g

إذن ∞ هي نقطة أساسية شاذة للدالة f

لا يكتب في هذا الهامش

8) $f(z)=U+iV$ فإن $\overline{f(z)}=U-iV$ (1)

f و $\overline{f}$ تحليلية فإنهما تحقق معادلتي كوشي ريمان

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \quad (1)\end{cases}$$ كذلك $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y} \quad (2)\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\left(-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\end{cases}$$ (1)

إذن $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$ و $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$ بالتكامل $$\begin{cases}u(x,y)=a(y)\\ v(x,y)=b(y)\end{cases}$$ بالاشتقاق (1)

بالنسبة لـ y ، نجد أن: $\dfrac{\partial v}{\partial y}=0=b'(y)$ و $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0=a'(y)$ (1.5)

ومنه $a(y)=a$ ثابتة وكذلك $b(y)=b$ ثابتة ومنه

$u(x,y)=a$ و $v(x,y)=b$ أي أن: $f(z)=a+ib$

ثابتة على المنطقة D.

9) نضع $w=\cos^{-1}z \iff z=\cos w \iff z=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$ (1)

$\Rightarrow 2z=e^{iw}+e^{-iw} \iff e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$ وهي

معادلة من الدرجة الثانية لـ e^{iw}.

المميز: $\Delta=4z^2-4$

$$e^{iw}=\frac{2z\pm 2\sqrt{z^2-1}}{2}$$ (2)

$$e^{iw}=z\pm\sqrt{z^2-1}$$

$$w=\cos^{-1}z=\frac{1}{i}\log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\cos^{-1}z=-i\log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

باستخدام قاعدة السلسلة فإن: (1.5)

$$\frac{d}{dz}\cos^{-1}z=-i\,\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\cos^{-1}z=\frac{-i}{\sqrt{z^2-1}}=-i\,(z^2-1)^{-1/2}=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

الجزء الثاني:

السؤال الأول: $U(x,y)=e^x\sin y$,

1) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=e^x\sin y$ و $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=e^x\cos y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=e^x\sin y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=-e^x\cos y$

إذن $\Delta u(x,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$

$\Delta u(x,y)=0$, لكل $(x,y)\in R^2$

يعني أن الدالة u توافقية على R^2

لإيجاد مرافقة توافقية لها نستعمل معادلتي كوشي-ريمان:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\sin y=\frac{\partial v}{\partial y} & (1)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=e^x\cos y=-\frac{\partial v}{\partial x} & (2)\end{cases}$$

من (1) لدينا: $v(x,y)=-e^x\cos y+C(x)$, بالاشتقاق بالنسبة لـ x نجد أن

$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=-e^x\cos y+C'(x)$

بالمقارنة مع (2) نجد أن: $C'(x)=0$ يعني $C(x)=c$

و منه $v(x,y)=-e^x\cos y+c$.

2) من 1) نستنتج أن الدالة: $f=U+iv$ تحليلية في $\mathbb{C}$.

بأخذ $c=0$ مثلاً نجد الدالة التالية.

$f(z)=U(x,y)+iv(x,y)=e^x\sin y+i(-e^x\cos y)$

جزؤها الحقيقي $Re f=U(x,y)$

$f(z)=e^x(\sin y-i\cos y)=-ie^x(\cos y+i\sin y)$

$f(z)=-ie^x.e^{iy}=-ie^{x+iy}=-ie^z$

- الصيغة القطبية للدالة: $f(z)=-ie^z$ أي

$f(z)=-ie^{re^{i\theta}}$, $z=re^{i\theta}$

$=-ie^{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$=-ie^{r\cos\theta}e^{ir\sin\theta}$

$=-ie^{r\cos\theta}[\cos(r\sin\theta)+i\sin(r\sin\theta)]$

$$f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$$

حيث

$$u(r,\theta) = e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)$$

$$v(r,\theta) = -e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta).$$

السؤال الثاني :

1) بوضع $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ فإن لـ $f = u+iv$

لدينا $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big((u_x - v_y) + i\,(v_x + u_y)\Big)$$ 2

لذا فإن : $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0 \iff \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

① $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

② $$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta$$ 5

بنفس الطريقة :

③ $$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta$$

④ $$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}(r\cos\theta)$$

بما أن $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ فإن ③ و ④

تصبحان $$v_r = -u_y\cos\theta + u_x\sin\theta = -\frac{1}{r}u_\theta$$

$$v_\theta = r\sin\theta\, u_y + u_x\, r\cos\theta = r(u_y\sin\theta + u_x\cos\theta) = r\,u_r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r}u_\theta = -v_r \\ u_r = \frac{1}{r}v_\theta \end{cases}$$

٣) $|f(z)|=c$ و f تحليلية أي u و v توافقية

$$|f(z)|=c \Rightarrow u^2+v^2=c^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2u\,u_x+2v\,v_x=0 \\ 2u\,u_y+2v\,v_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u_x)^2+u.u_{xx}+(v_x)^2+v.v_{xx}=0 \\ (u_y)^2+u.u_{yy}+(v_y)^2+v.v_{yy}=0 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرف الى طرف نجد أن:

$$(u_x)^2+(u_y)^2+u\underbrace{(u_{xx}+u_{yy})}_{=0}+(v_x)^2+(v_y)^2+v\underbrace{(v_{xx}+v_{yy})}_{=0}=0$$

$$(u_x)^2+(u_y)^2+(v_x)^2+(v_y)^2=0$$

$$u_x=0\ ,\ u_y=0\ ,\ v_x=0 \text{ و } v_y=0$$

- $u_x=0 \Rightarrow u=\alpha(y) \Rightarrow u_y=\alpha'(y)=0$
$\Rightarrow \alpha(y)=\alpha$
- $v_x=0 \Rightarrow v=\beta(y) \Rightarrow v_y=\beta'(y)=0 \Rightarrow \beta(y)=\beta$

ومنه $u(x,y)=\alpha$ و $v(x,y)=\beta$ ثابتتين

هذا يؤدي الى $f=u+iv$ ثابتة على F