جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات	
الفصل الأول 1435-1434 هـ / 487 ريض / الاختبار الشهري الأول / الزمن: ساعتان	

الجزء الأوّل (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها, 19 درجة) :

(1) أكتب الدالة $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ على الصيغة التالية : $f(z)=U(r,\theta)+i\,V(r,\theta)$.

(2) حل المعادلة في $\mathbb{C}$ التالية : $z^2=3+4i$ ثم استنتج جذور المعادلة : $(1+i)z^2-iz-1=0$.

(3) أوجد النهايات التالية : $\lim\limits_{z\to\pi}\dfrac{(z-\pi)e^{iz}}{\sin z}$, $\lim\limits_{z\to-\pi i} e^{\frac{z^2+\pi^2}{z+\pi i}}$.

(4) لتكن Log القيمة الأساسية للدالة اللوغاريتمية المركبة و لتكن $z_1=2i, z_2=e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ فاحسب ما يلي :

$$Log(z_1), Log(z_2), Log(z_1 z_2), Log(z_1^2), Log(z_2^2), Log\left(\frac{z_1}{z_2}\right).$$

(5) أثبت أن : لكل $z\in\mathbb{C}$, $\overline{e^z}=e^{\bar z}$, $\overline{\cos(iz)}=\cos(i\,\bar z)$ ثم استنتج أن : $\overline{\cosh(z)}=\cosh(\bar z)$.

(6) بيَن أن الدالة $u(x,y)=2x\,(1-y)$ هي توافقية على $\mathbb{R}^2$ ثم أوجد الدالة المرافقة التوافقية لـ u.

الجزء الثاني (6 درجات) :

لتكن f دالة تحليلية على نطاق $D\subseteq\mathbb{C}$. باستخدام معادلتي كوشي-ريمان, أثبت أن الدالة f هي ثابتة إذا تحقق إحدى الشروط التالية :

(أ) لكل $z\in D$, $f(z)=f(\bar z)$.

(ب) $\Re e(f)=cst$ حيث cst هو ثابت حقيقي.

(ج) $\Im m(f)=cst$ حيث cst هو ثابت حقيقي.

(د) $|f|=cst$ حيث cst هو ثابت حقيقي موجب.

و الله ولي التوفيـــــق

إصلاح الاختبار الشهري الأول ٢٨٧ ريض
للفصل الأول ١٤٣٤ - ١٤٣٥ هـ

الجزء الأول: (١٩ درجة)

① $z \neq 0 \quad , \quad f(z) = z + \frac{1}{z}$

$r = |z| , \theta = \arg z , \quad z = r e^{i\theta}$

$f(r,\theta) = r e^{i\theta} + \frac{1}{r e^{i\theta}} = r e^{i\theta} + \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

$f(r,\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta + \frac{1}{r}\cos\theta - \frac{i1}{r}\sin\theta$

$f(r,\theta) = (r + \frac{1}{r})\cos\theta + i\,(r - \frac{1}{r})\sin\theta$

1 $U(r,\theta) = \mathrm{Re}\, f(r,\theta) = (r + \frac{1}{r})\cos\theta$

$V(r,\theta) = \mathrm{Im}\, f(r,\theta) = (r - \frac{1}{r})\sin\theta$

② نضع $z = x + iy$

$z^2 = (x+iy)^2 = 3 + 4i$

$|z|^2 = |3+4i| = 5 = x^2 + y^2$

$x^2 - y^2 + 2i\,xy = 3 + 4i$

2 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$S_{\mathbb{C}} = \{ -2 - i \; ; \; 2 + i \}$

$(1+i)\, z^2 - iz - 1 = 0$

$a = 1+i , \; b = -i \; ; \; c = -1$ معادلة من الدرجة الثانية

$\Delta = b^2 - 4ac = -1 + 4(1+i) = 3 + 4i = (2+i)^2$

$z_1 = \frac{i - (2+i)}{2(1+i)} = \frac{-2}{2(1+i)} = \frac{-1}{1+i} = -\frac{(1-i)}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

1 $z_2 = \frac{i + (2+i)}{2(1+i)} = \frac{2+2i}{2(1+i)} = 1$

$S_{\mathbb{C}} = \{ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \; ; \; 1 \}$

$$\lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)\,e^{iz}}{\sin z} = \lim_{z\to\pi}\frac{1}{\frac{\sin z}{z-\pi}}\,e^{iz} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\lim_{z\to\pi}\frac{\sin z}{z-\pi}}\;\lim_{z\to\pi} e^{iz}$$

$$= \frac{1}{\cos\pi}\,e^{i\pi} = 1$$

$$\lim_{z\to-\pi i} e^{\frac{z^2+\pi^2}{z+\pi i}} = e^{\frac{0}{0}}$$

$$z^2+\pi^2 = (z-\pi i)(z+\pi i)$$

$$\lim_{z\to-\pi i} e^{\frac{z^2+\pi^2}{z+\pi i}} = \lim_{z\to-\pi i} e^{z-\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$$

$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z \quad , \; z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \text{ أين} \quad (4)$$

$$-\pi < \mathrm{Arg}\, z < \pi$$

- $\mathrm{Log}\, z_1 = \mathrm{Log}(2i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$
- $\mathrm{Log}\, z_2 = \mathrm{Log}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) = -i\frac{3\pi}{4}$
- $z_1 z_2 = 2i\,e^{-i3\pi/4} = 2e^{i\pi/2}\cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{-i\pi/4}$

$\mathrm{Log}\, z_1 z_2 = \ln 2 - i\frac{\pi}{4}$

- $z_1^2 = (2i)^2 = -4$

$\mathrm{Log}\, z_1^2 = \mathrm{Log}(-4)$ غير معرف

- $z_2^2 = \left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = e^{-i\frac{3\pi}{2}}$

$\mathrm{Log}\, z_2^2 = \mathrm{Log}\, e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \mathrm{Log}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = i\frac{\pi}{2}$

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = 2e^{i\pi/2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

$\mathrm{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln 2 - i\frac{3\pi}{4}$

ليكن $z = x+iy \in \mathbb{C}$ فإن $\bar{z} = x - iy$ (5)

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$\overline{(e^{z})} = e^{x}(\cos y - i\sin y)$$

(2)

$$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^{x} e^{-iy} = e^{x}[\cos y - i\sin y]$$

فنستنتج أن $\overline{(e^{z})} = e^{\bar{z}}$

نعلم أن $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ لكل $z \in \mathbb{C}$

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \cosh z$$

(2)

$$\overline{\cos(iz)} = \frac{e^{-\bar{z}} + e^{\bar{z}}}{2}$$

$$\cos(i\bar{z}) = \frac{e^{i(i\bar{z})} + e^{-i(i\bar{z})}}{2} = \frac{e^{-\bar{z}}+e^{\bar{z}}}{2} = \cosh(\bar{z})$$

إذاً $\overline{\cos(iz)} = \cos(i\bar{z})$

فنستنتج أن $\cosh \bar{z} = \overline{\cosh z}$

(6) $u(x,y) = 2x(1-y)$

$= 2x - 2xy$

نشتق [illegible] جزئياً

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2-2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2x$$

(2)

فنستنتج أن $\Delta u(x,y) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$

إذاً u هي دالة توافقية فهي لها مرافق v بحيث

$f = u + iv$ هي دالة تحليلية على $\mathbb{R}^2$

باستخدام معادلتي كوشي ريمان

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2-2y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x \quad (1) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2-2y \quad (2) \end{cases}$$

بتكامل طرفي المعادلة (1) بالنسبة لـ x:

$$V(x,y) = \int 2x\,dx$$

2 $$= x^2 + \alpha(y)$$

باشتقاق V بالنسبة لـ y ومطابقة مع (*)

$\alpha'(y) = 2 - 2y$ فإن $\alpha(y) = 2y - y^2 + c$

إذاً $v(x,y) = x^2 - y^2 + 2y + c$

<u>الجزء الثاني</u> (6 درجات)

نفترض أن f تحليلي على نطاق $D \subseteq \mathbb{C}$ (مترابط)

أ) نفترض أن $f(z) = f(\bar{z})$ لكل $z \in \mathbb{C}$

2 $$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} = \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} = 0$$

حيث $w = \bar{z}$

فنستنتج أن f هي دالة <u>ثابتة</u> على D (لأن D مترابط)

ب) $U = Re\, f = cst$ ، $V = Im\, f$

بما أن f تحليلي على D فإن لدينا

1.5 معادلتي كوشي ريمان $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

بما أن $U = Re\, f = cst$ فإن $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ومنه $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

كذلك $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ فإن $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

بما أن $\frac{\partial v}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial v}{\partial x}$ جميعها أصفار

1 يعني f هي دالة <u>ثابتة</u> على D.

جـ) بنفس الطريقة لـ (ب).

د) $|f| = cst \iff |f|^2 = c$ حيث $c \in \mathbb{R}_+$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لـ z.

$$\frac{\partial}{\partial z}|f|^2 = \frac{\partial}{\partial z} f\cdot\bar{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\overline{f(z)} + f(z)\frac{\partial}{\partial \bar z}\bar{f}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bar{f}(z) = 0$$

لأن $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0 \Rightarrow$ f تحليلية على D.

بما أن $\frac{\partial}{\partial z}|f|^2 = 0$ فإن $\frac{\partial f}{\partial z}(z) = 0$

هذا يؤدي الى أن f دالة ثابتة والعكس صحيح.