جامعـــــة الملك سعــــود كليـــة العلـــوم قســـم الريـــاضيـــــــات

الفصل الأول **1433-1434** هـ/**487**-ريض/ الاختبار الشهري الأول/ الزمن: ساعة ونصف

السؤال الأوّل (14 نقاط)

1) حل المعادلات التالية في $\mathbb{C}$:

أ) $z^2-(3-2i)z+1-3i=0$.

ب) $(z+1)^5=z^5$

2) ليكن z_1,z_2 عددين مركبين بحيث كلا من $z_1z_2\,;z_1+z_2$ عددان حقيقيان سالبان. برهن على أن z_1,z_2 يجب أن يكونا حقيقيان.

3) اكتب كلا مما يلي في الصورة $a+ib$:

أ) $\sin 2i$

ب) $\cos(1-i)$.

4)استخدم نظرية دي موافر مع نظرية ذات الحدين لإثبات أن : $\sin 4\theta=4\cos^3\theta\sin\theta-4\cos\theta\sin^3\theta$.

السؤال الثاني (5 نقاط):

صف مجموعة النقاط z في المستو المركب التي تحقق كل من الشروط الآتية :

أ) $|2z-i|=4$.

ب) $|z-1|=|z+i|$.

ج) $|z-1|+|z+i|=7$.

السؤال الثالث (6 نقاط):

أوجد دالة تحليلية يكون جزؤها الحقيقي هو: $U(x,y)=x^3-3xy^2+y$.

و الله ولي التوفيـــــــق

إصلاح اختبار الشهري الأول للفصل الأول ١٤٣٣-١٤٣٤هـ

(٤٨٧ ريض)

السؤال الأول (14 درجة)

1 أ) $z^2-(3-2i)z+(1-3i)=0$ معادلة من درجة الثانية

تكتب على الشكل $az^2+bz+c=0$ حيث

$a=1$; $b=-(3-2i)=-3+2i$; $c=1-3i$

المميز: $\Delta=b^2-4ac$

1 $=(3-2i)^2-4(1-3i)$

$=9-4-12i-4+12i=1>0$

1 $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-2i-1}{2}=1-i$

1 $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-2i+1}{2}=2-i$

$S_{\mathbb{C}}=\{1-i\ ;\ 2-i\}$

ب) $(z+1)^5=z^5$ بما أن $z=0$ ليس جذراً فإن:

1 $U=\frac{z+1}{z}$ نضع . $\left(\frac{z+1}{z}\right)^5=1$

$U=e^{i\theta}$ نضع ; $U^5=1=e^{2ik\pi}$

$U_k=e^{\frac{2ik\pi}{5}},\ 0\le k\le 4 \Leftarrow e^{i5\theta}=e^{2ik\pi}$ إذن

$U_0=1=\frac{z+1}{z} \Leftrightarrow z=z+1$ لا

1 $U_1=e^{i2\pi/5}=\frac{z_1+1}{z_1}\Rightarrow z_1e^{i2\pi/5}=z_1+1$

$(e^{i2\pi/5}-1)z_1=1 \Rightarrow z_1=\frac{1}{e^{i2\pi/5}-1}=\frac{e^{-i\pi/5}}{e^{i\pi/5}-e^{-i\pi/5}}$

$z_1=\frac{\cos(\pi/5)-i\sin(\pi/5)}{2i\sin(\pi/5)}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\cot(\pi/5)$

$U_2=e^{i4\pi/5} \Longrightarrow z_2=\frac{1}{e^{i4\pi/5}-1}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\cot(2\pi/5)$

$U_3=e^{i6\pi/5} \Rightarrow z_3=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\cot(3\pi/5)$

1 $U_4=e^{i8\pi/5} \Rightarrow z_4=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\cot(4\pi/5)$

$S_{\mathbb{C}}=\left\{z_k=\frac{1}{2}-i/2\cot\frac{k\pi}{5}\ /\ 1\le k\le 4\right\}$

② نضع $\alpha = z_1 + z_2$ و $\beta = z_1 \cdot z_2$ ... نرى أن z_1 و z_2

هما جذور المعادلة $z^2 - \alpha z + \beta = 0$ (*)

(2) المميز $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$

بما أن $\beta < 0$ فإن $\Delta > 0$

إذن z_1 و z_2 هما جذور حقيقية لـ (*)

③ نعلم أن لكل $z \in \mathbb{C}$ ، $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ و $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ (1)

أ) $\sin(2i) = \frac{e^{i(2i)} - e^{-i(2i)}}{2i}$

$\sin(2i) = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2i} = \left(\frac{e^2 - e^{-2}}{2}\right) i = a + ib$ و هو عدد تخيلي بحت

(1) حيث $a = 0$ و $b = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \sinh 2$

ب) (1) $\cos(1-i) = \frac{e^{i(1-i)} + e^{-i(1-i)}}{2}$

$\cos(1-i) = \frac{e^{i+1} + e^{-1-i}}{2} = \frac{e\, e^{i} + e^{-1} e^{-i}}{2}$

$e^{i} = \cos 1 + i \sin 1$ $\left(e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\right)$ أولير

$e^{-i} = \cos 1 - i \sin 1$

$\cos(1-i) = \frac{e(\cos 1 + i\sin 1) + e^{-1}(\cos 1 - i\sin 1)}{2}$

$= \left(\frac{e^1 + e^{-1}}{2}\right)\cos 1 + i\left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2}\right)\sin 1$

(1) $\cos(1-i) = \cosh 1 \cos 1 + i \sinh 1 \sin 1$

$= a + i b$

حيث $a = \cosh 1 \cos 1$ و $b = \sinh 1 \sin 1$

④ نعلم أن $\sin(4\theta) = \operatorname{Im}(e^{i4\theta})$ لكل $\theta \in \mathbb{R}$

(1) لكل $\theta \in \mathbb{R}$ $e^{i4\theta} = (e^{i\theta})^4 = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$

$e^{i4\theta} = \cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta$

(1) $\cos(4\theta) + i\sin(4\theta) = (\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\,\sin^2\theta + \sin^4\theta) + i(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta)$

نستنتج أن $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$ لكل $\theta\in\mathbb{R}$

السؤال الثاني (5 درجات)

أ) $\mathcal{C} = \{ z \in \mathbb{C} / |2z - i| = 4 \}$

ليكن $z \in \mathcal{C}$

(1) $|2z - i| = |2(z - i/2)| = 2\,|z - i/2| = 4$

$|z - i/2| = 2$

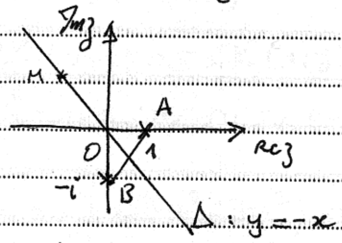
z تنتمي لدائرة مركزها $z_0 = i/2$ ونصف قطرها 2.

ب) $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} / |z-1| = |z+i| \}$

نضع $M(z)$, $A(1)$ و $B=(-i)$

$|z-1| = |z+i| \iff AM = BM$

(2) إذن M تقع على منتصف $[A,B]$.

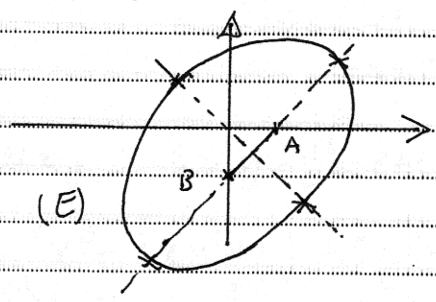


ج) $E = \{ z \in \mathbb{C} / |z-1| + |z+i| = 7 \}$

نضع $M(z)$, $A(1)$ و $B(-i)$

(2) $|z-1| + |z+i| = 7 \iff AM + BM = 7$

إذن M تقع على قطع ناقص ذات بؤرتين A و B.



لا يكتب في هذا الهامش

السؤال الثالث (6 درجات)

(كثير حدود بمتغيرين) $U(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

1

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y^2 \; ; \; \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) = 6x$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = -6xy + 1 \; ; \; \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) = -6x$$

بما أن $\Delta U = 0$ إذن U هي دالة توافقية على $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

إذن يوجد دالة f تحليلية على $\mathbb{C}$ بحيث جزؤها الحقيقي هو U

$f = U + iV$ (V مرافق لـ U).

فلنبحث عن صيغة V: بما أن f تحليلية على $\mathbb{C}$ فإن U و V تحققان معادلتي كوشي-ريمان:

2

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - 3y^2 & (1) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = -6xy + 1 & (2) \end{cases}$$

بتكامل طرفي المعادلة (1) بالنسبة للمتغير y:

$$V(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2)\, dy$$

$$= 3x^2y - y^3 + \alpha(x)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x والمقارنة مع (2):

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = 6xy + \alpha'(x) = 6xy - 1$$

$$\alpha'(x) = -1$$

يعطي $\alpha(x) = -x + c$

2

إذن $V(x,y) = 3x^2y - y^3 - x + c$

1

$$f(x+iy) = (x^3 - 3xy^2 + y) + i(3x^2y - y^3 - x + c), \; c \in \mathbb{R}$$

$$= (x+iy)^3 + (y - ix) + ic = (x+iy)^3 - i(x+iy) + ic$$

$$= z^3 - iz + ic, \; c \in \mathbb{R}.$$