كليّة العلوم – قسم الرياضيات- الفصل الصيفي 1439-1440 ﻫ
مقرّر 379 ريض – اسس الهندسة الإقليدية و اللاإقليدية
اختبار الفصلي الثاني – مدّة الاختبار: ساعة ونصف

السؤال الاول (18 درجة)

نعتبر في الكرة S^2, النقاط التالية : $\xi_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\xi_2\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\xi_3\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

(1) احسب مساحة المثلّث الكروي $\xi_1\xi_2\xi_3$ وتأكّد من تحقّق قاعدة الجيوب فيه. (6 درجات)

(2) اعط صيغة الانعكاس الكروي $\Omega_{\xi_1\xi_2}$ بالنسبة للمستقيم الكروي $\xi_1\xi_2$. (3 درجات)

(3) نعتبر في الكرة S^2, النقاط $\xi_1'(0,1,0)$, $\xi_2'(0,0,1)$, $\xi_3'(1,0,0)$. أثبت أنّ المثلّث الكروي $(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$ مطابق للمثلّث الكروي $(\xi_1\xi_2\xi_3)$ و أعط صيغة التقايس الذي يحوّل $(\xi_1\xi_2\xi_3)$ إلى $(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$ ثم عيّن طبيعته و حدّد عناصره.

(9 درجات)

السؤال الثاني (7 درجات)

(1) اعط صيغة الدوران الكروي $\Re_{\left(\Omega,\frac{\pi}{3}\right)}$ الذي مركزه $\Omega\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

(3 درجات)

(2) بيّن أن التحويل $T: S^2 \to S^2$ المعرّف بـ

$$T:\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

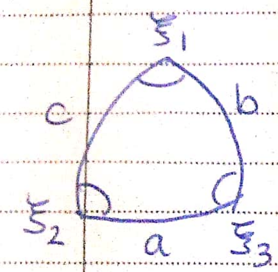
تقايس كروي, عيّن طبيعته, و حدّد عناصره. (4 درجات)

و الله ولي التوفيق

لا يكتب في هذا الهامش

د. برهان

تصحيح الاختبار الثاني 379 ريض للفصل الصيفي 1439/1440 هـ



السؤال الأول: (18 درجة)

① نضع $a=\widehat{\xi_2\xi_3}$ طول ضلع بين ξ_2 و ξ_3

$b=\widehat{\xi_1\xi_3}$ طول ضلع بين ξ_1 و ξ_3

$c=\widehat{\xi_1\xi_2}$ طول ضلع بين ξ_1 و ξ_2

لمساحة المثلث الكروي $\Delta\,\xi_1\xi_2\xi_3$ هي

1

$$A(\Delta)=\hat{\xi}_1+\hat{\xi}_2+\hat{\xi}_3-\pi$$

$$\cos\hat{\xi}_1=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

1

$$\cos\hat{\xi}_2=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin a\sin c}$$

$$\cos\hat{\xi}_3=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}$$

$$a=\widehat{\xi_2\xi_3}=\cos^{-1}(\langle\xi_2\mid\xi_3\rangle)$$

1

$$=\cos^{-1}\left\langle\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\-2/3\end{pmatrix}\right\rangle=\cos^{-1}\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{4}{9}\right)$$

$\cos a=0$; $\sin a=1$

$$a=\cos^{-1}(0)=\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$b=\widehat{\xi_1\xi_3}=\cos^{-1}(\langle\xi_1\mid\xi_3\rangle)$$

1

$$=\cos^{-1}\left(\left\langle\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\-2/3\end{pmatrix}\right\rangle\right)=\cos^{-1}\left(\frac{4}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\right)$$

$\cos b=0$

$\sin b=1$

$$b=\cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$$

1

$$c=\widehat{\xi_1\xi_2}=\cos^{-1}(\langle\xi_1\mid\xi_2\rangle)$$

$\cos c=0$

$\sin c=1$

$$=\cos^{-1}\left(\left\langle\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}\right\rangle\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)$$

$$=\cos^{-1}(0)=\pi/2$$

$$\cos(\hat{\xi}_1) = \frac{0-0}{1} = 0 \Rightarrow \hat{\xi}_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\hat{\xi}_2) = \frac{0-0}{1} = 0 \Rightarrow \hat{\xi}_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\hat{\xi}_3) = \frac{0-0}{1} = 0 \Rightarrow \hat{\xi}_3 = \frac{\pi}{2}$$

فان مساحة المثلث $\Delta \xi_1\xi_2\xi_3$ هي $\frac{\pi}{2}$.

1

• قاعدة الجيوب $\frac{\sin a}{\sin \hat{\xi}_1} \overset{?}{=} \frac{\sin b}{\sin \hat{\xi}_2} \overset{?}{=} \frac{\sin c}{\sin \hat{\xi}_3}$

$$\frac{\sin c}{\sin \hat{\xi}_3} = 1 \;;\; \frac{\sin b}{\sin \hat{\xi}_2} = 1 \;,\; \frac{\sin a}{\sin \hat{\xi}_1} = \frac{1}{1} = 1$$

2 $l = (\xi_1, \xi_2)$ مستقيم كروي ذات قطب ξ

حيث $\xi = \xi_1 \times \xi_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

$$\xi = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6\\1-4\\-6\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6\\-3\\-6\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

1

$$\Omega_l(X) = X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$X' = X - 2\langle X|\xi\rangle\xi$$

1

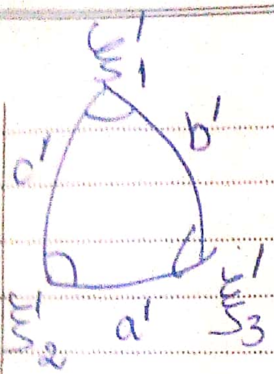
$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{2}{9}(2x - y - 2z)\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{8}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{8}{9}z \\ y + \frac{4}{9}x - \frac{2}{9}y - \frac{4}{9}z \\ z + \frac{8}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{8}{9}z \\ \frac{4}{9}x + \frac{7}{9}y - \frac{4}{9}z \\ \frac{8}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{1}{9}z \end{pmatrix}$$

1

$$\Omega_{\xi_1\xi_2} : \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\4 & 7 & -4\\8 & -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

لا يكتب في هذا الهامش



مثلث كروي

③ نخرج

طول الضلع $a' = \overset{\frown}{\xi'_2 \xi'_3}$

// // $b' = \overset{\frown}{\xi'_1 \xi'_3}$

$c' = \overset{\frown}{\xi'_1 \xi'_2}$

$$a' = \cos^{-1}\langle \xi'_2 | \xi'_3 \rangle = \cos^{-1}\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$a' = \cos^{-1}(0) = \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \pi/2$$

$$a' = \frac{\pi}{2} = a = \overset{\frown}{\xi_2 \xi_3}$$

②

$$b' = \cos^{-1}\langle \xi'_1 | \xi'_3 \rangle = \cos^{-1}\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$b' = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} = b = \overset{\frown}{\xi_1 \xi_3}$$

$$c' = \cos^{-1}\langle \xi'_1 | \xi'_2 \rangle = \cos^{-1}\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$c' = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} = c = \overset{\frown}{\xi_1 \xi_2}$$

فنستنتج أن المثلثان $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ و $\xi'_1 \xi'_2 \xi'_3$ متطابقان ومتساوي الأضلاع

نخرج φ التقايس الذي يحول $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ إلى $(\xi'_1 \xi'_2 \xi'_3)$

$$M_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \quad ; \quad M_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

فإن مصفوفة التقايس φ هي

$$A_\varphi = M_2 \, M_1^{-1}$$

$$|M_1| = \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\left[(8-1+8)-(-4-4-4)\right] = 1$$

②

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{6}{9} & \frac{3}{9} & \frac{6}{9} \\ \frac{6}{9} & -\frac{6}{9} & -\frac{3}{9} \\ \frac{3}{9} & \frac{6}{9} & -\frac{6}{9} \end{pmatrix}^T$$

$$M_1^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_\varphi = M_2 M_1^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1

$$A_\varphi = \frac{1}{3}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

بما أن:

$$u \times v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ -1+4 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = w$$

1

فإن التقايس φ هو دوران

$2\cos\theta + 1 = tr(A_\varphi)$

زاويته هو

$$\cos\theta = \frac{tr(A_\varphi) - 1}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

1

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

ومركزه: $\Omega = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

محور الدوران:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x = 2x - y - 2z \\ 3y = 2x + 2y + z \\ 3z = x - 2y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -2 & -2 & -4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

لا يكتب في هذا الهامش

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ y+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-2z=z-2z=-z \\ y=-z\end{cases}$$

Axis $= \{(-z,-z,z)/z\in\mathbb{R}\}$ محور الدوران

2

$$3z^2=1 \Rightarrow z^2=\frac{1}{3}$$

مركز الدوران $\Omega=\left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$

لمعرفة التوجيه الدوراني

$$\sin\theta = \det\left(\vec{\xi_1}, \vec{\xi_1'}, \left(-1/\sqrt3,-1/\sqrt3,1/\sqrt3\right)\right) \quad ⚠$$

$$\sin\theta = \begin{vmatrix} 2/3 & 0 & -1/\sqrt3 \\ 2/3 & 1 & -1/\sqrt3 \\ 1/3 & 0 & 1/\sqrt3\end{vmatrix} = \left[\frac{2}{3\sqrt3} - \left(-\frac{1}{3\sqrt3}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt3}>0$$

السؤال الثاني: (7 درجات)

1 صيغة الدوران الكروي $R_{(\Omega,\frac{\pi}{3})}$ حيث $\Omega(1/3, 2/3, -2/3)$

$$\vec N=\frac{1}{3}(\underset{a}{1},\underset{b}{2},\underset{c}{-2}), \quad \varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$\vec{OM'} = (1-\cos\varphi)\,\langle \vec{OM}|\vec N\rangle \vec N + \cos\varphi\,\vec{OM} + \sin\varphi\,(\vec N\times\vec{OM})$$

$\cos\varphi=1/2$

$\sin\varphi=\frac{\sqrt3}{2}$

وبالتالي مصفوفة الدوران هي:

2

$$A_\varphi = (1-\cos\varphi)\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}+\cos\varphi\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\sin\varphi\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&2\\-2&0&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

$$A_\varphi=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1/\sqrt3&1/\sqrt3\\-1/\sqrt3&0&-\frac{1}{2\sqrt3}\\-1/\sqrt3&\frac{1}{2\sqrt3}&0\end{pmatrix}$$

1

$$A_\varphi = \begin{pmatrix}5/9 & \frac19+\frac{\sqrt3}{3} & -\frac19+\frac{\sqrt3}{3}\\ \frac19-\frac{\sqrt3}{3} & \frac{13}{18} & -2/9-\frac{\sqrt3}{6} \\ -\frac19-\frac{\sqrt3}{3} & -\frac29+\frac{\sqrt3}{6} & \frac{13}{18}\end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix}10 & 2+6\sqrt3 & 6\sqrt3-2\\ (2-6\sqrt3) & 13 & -4-3\sqrt3\\ (-2-6\sqrt3) & (3\sqrt3-4) & 13\end{pmatrix}$$

لا يكتب في هذا الهامش

(2)

$$A_T = \frac{1}{7}\begin{array}{ccc} u & v & w \end{array}$$
$$A_T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_T^T \cdot A_T = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

1

$$= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = I_3$$

وبالتالي T هو تقايس

بما أن

$$u \times v = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 21 \\ -18+4 \\ -6-36 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 21 \\ -14 \\ -42 \end{pmatrix}$$

1

$$u \times v = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = -w$$

فإن التحويل T هو انعكاس { إما محوري / إما مصحوب بدوران ~~X~~

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & \boxed{-3} \\ 6 & 3 & 2 \\ \boxed{-3} & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7x = -2x + 6y - 3z \\ 7y = 6x + 3y + 2z \\ 7z = -3x + 2y + 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ 9x - 6y + 3z = 0 \\ (2)\ 6x - 4y + 2z = 0 \\ (3)\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$(2) = 2\times(3)$; $(1) = 3\times(3)$

Scanned by CamScanner

لا يكتب في
هذا الهامش

$\Leftrightarrow 3x - 2y + z = 0$

2 وبالتالي T هو انعكاس حول المستقيم
معادلته $3x - 2y + z = 0$.