الاختبار الشهري 209 ريض للفصل الأول 1442-1443 هـ	جامعة الملك سعود King Saud University

السؤال الأول (6 درجات)

اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية:

$$\left\{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\right\}_{n\geq 0},\quad \left\{(n+2)^{1/n}\right\},\quad \left\{\frac{(-1)^n+1}{2^n+1}\right\},\quad \left\{\frac{3^n+n}{4n^2+3}\right\}$$

السؤال الثاني (8 درجات)

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n^3+n+1},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right),\quad \sum_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right],\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n(n+2)}$$

السؤال الثالث (4 درجات)

أوجد فترة ونصف قطر التقارب للمتسلسلة القوى التالية: $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{2^n}(x+1)^n$.

السؤال الرابع (6 درجات)

(1) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة $f(x)=\frac{1}{4+5x}$ وماهي فترة تقاربها؟

(2) استنتج من (1) متسلسلة القوى للدالة $g(x)=\frac{1}{(4+5x)^2}$.

(3) استنتج من (2) مجموع المتسلسلة التالية: $\sum_{n=1}^{\propto}(-1)^n n\frac{1}{4^n}$.

السؤال الخامس (6 درجات)

(1) إذا كانت $e^u=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n!}$ لكل $u\in\mathbb{R}$، أوجد القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ وذلك بتكامل عوامل الحدود الثلاثة الأولى لمتسلسلة القوى في x للدالة e^{-x^2}.

(2) جد الحدود الأربعة الأولى لمتسلسلة تايلور للدالة $f(x)=\ln x$ عندما $x=2$.

تصحيح الاختبار 2019 (بيض)

السؤال الأول: (٣ درجات)

• $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n+1}-\sqrt{n} = \infty-\infty$ IF

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}}$$

1,5

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1-n}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}\left[1+\sqrt{2+1/n}\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n}+1/\sqrt{n}\right)}{\cancel{\sqrt{n}}\left(1+\sqrt{2+1/n}\right)}$$

$$= \infty$$

•

$$\lim_{n\to+\infty} (n+2)^{1/n} = \infty^0 \quad (I.F)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left[(n+2)^{1/n}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+2)}{n} = \frac{\infty}{\infty}$$

1,5

$$\text{لوبيتال} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{1} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} (n+2)^{1/n} = e^0 = 1 \text{ ومنه}$$

Scanné avec CamScanner

- $$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n + 1}{2^n + 1}$$

نستخدم نظرية الحصر:

1,5

$$\left| \frac{(-1)^n + 1}{2^n + 1} \right| \leq \frac{2}{2^n + 1} \leq \frac{2}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

بما أن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ فإن $\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n + 1}{2^n + 1} = 0$

- $$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n + n}{4n^2 + 3} = \frac{\infty}{\infty} \quad IF$$

1,5

قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x + x}{4x^2 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln 3) 3^x + 1}{8x} = \frac{\infty}{\infty}$$

قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln 3)^2 \, 3^x}{8} = +\infty$$

<u>السؤال الثاني:</u>

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n^3 + n + 1} = \sum_{n} a_n$$

$a_n = \frac{n + \sqrt{n}}{n^3 + n + 1}$، نستخدم مقارنة النهاية

نستخدم اختبار نهاية المقارنة نأخذ $b_n = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

2

بما أن $\lim_{\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ و $\sum \frac{1}{n^2} = \sum b_n$ متقاربة

حيث $p=2>1$

نستنتج أن $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^3+n+1}\right)$ متقاربة.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

حيث $a_n = \ln\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)$

بما أن $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n+2}\right)$

$= \ln(3/5) \neq 0$

باستخدام اختبار التباعد نستنتج أن

2 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)\right)$ متباعدة

Scanné avec CamScanner

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right]=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-(n-1)}{n(n-1)}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}=\sum a_n$$

متسلسلة موجبة

باستخدام اختبار نهاية المقارنة: خذ $b_n = 1/n^2$

و بما أن $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن

(2) $\left(\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right]\right)$ متقاربة.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n(n+2)}=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\right)$$

$$=-\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}\right)}_{\text{متسلسلة موجبة}}$$

باستخدام اختبار نهاية المقارنة مع $\sum \frac{1}{n^2}$ فإن $\sum \frac{(-1)^{2n-1}}{n(n+1)}$ متقاربة.

Scanné avec CamScanner

السؤال الثالث (4 درجات)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}(x+1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x)$$

ندرس $\sum |a_n(x)|$ ونستخدم اختبار النسبة.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}(x+1)^{n+1}\cdot\frac{2^n}{(\ln n)(x+1)^n}\right|$$

$$= \left|\frac{x+1}{2}\right|\left|\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)\right|$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$$

قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1/(x+1)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = 1$$

2

$$L = \frac{|x+1|}{2}$$ وبالتالي

- إذا كان $L<1 \iff \frac{|x+1|}{2}<1 \iff |x+1|<2$

$\iff -2<x+1<2$

$\iff -3<x<1$

فإن السلسلة متقاربة تقاربا مطلقا.

- إذا كان $L>1$ يعني $x>1$ أو $x<-3$ فإن السلسلة متباعدة.

- إذا كان $L=1$ يعني $x=-3$ أو $x=1$:

• عندما $x=1$ فإن السلسلة تصبح $\left(\sum_{n}\ln n\right)$ متباعدة. 0,5

• عندما $x=-3$ فإن السلسلة تصبح $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln n$ وهي متباعدة (اختبار التباعد). 0,5

النتيجة: $\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}(x+1)^n\right)$ متقاربة على $(-3,1)$ 1

ونصف قطر التقارب $R=\frac{1-(-3)}{2}=2$.

السؤال الرابع: (6 درجات)

1

$$\frac{1}{4+5x} = \frac{1}{4\left[1-\left(-\frac{5x}{4}\right)\right]}$$

نعلم أن $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ لما $-1<u<1$

وبالتالي لما $-1 < -\frac{5x}{4} < 1$ ،

3

$$f(x) = \frac{1}{4+5x} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5x}{4}\right)^n\right)$$

يعني لما $\boxed{-4/5 < x < 4/5}$

$$f(x) = \frac{1}{4+5x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{4^{n+1}} x^n$$

$g(x) = \frac{1}{(4+5x)^2}$ حيث $f'(x) = \frac{-5}{(4+5x)^2} = -5g(x)$ 2

Scanné avec CamScanner

$$g(x) = -\frac{1}{5} f'(x)$$ فإن

باستخدام اشتقاق متسلسلة القوى:

لكل $-4/5 < x < 4/5$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{4^{n+1}} n x^{n-1}$$

إذاً لكل $\boxed{-4/5 < x < 4/5}$ ،

$$g(x) = \frac{1}{(4+5x)^2} = -\frac{1}{5}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{4^{n+1}} n x^{n-1}\right)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 5^{n-1} n x^{n-1}}{4^{n+1}} \quad (*)$$

2

$$\frac{1}{(4+5x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n (n+1)}{4^{n+2}} x^n$$

لكل $-4/5 < x < 4/5$

Scanné avec CamScanner

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{1}{4^n} \quad ③$$

نأخذ قيمة $x=1/5$ في (*)

$$\frac{1}{25}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cancel{5^{n-1}}}{4^{n+1}}n\cancel{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$$

$$\frac{1}{25}=\frac{-1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4^n}$$

① $$\boxed{-4/25=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4^n}\right)}$$ لنا

Scanné avec CamScanner

السؤال السادس :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots$$ لكل $u \in \mathbb{R}$ ①

فإن $$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$$ ③

فإن $$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^1 \left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right] dx$$

$$\approx \left[x - x^3/3 + x^5/10\right]_0^1 \approx 1 - 1/3 + 1/10$$

① $$\ln x = \ln 2 + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots$$ ②

لكل x في جوار 2

②

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = 1/x \; ; \; f'(2) = 1/2$

$f''(x) = -1/x^2 \; ; \; f''(2) = -1/4$

$f'''(x) = 2/x^3 \; ; \; f'''(2) = 1/4$

Scanné avec CamScanner