جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم - قسم الرياضيات	الاختبار النهائي للمقرر 209 ريض الفصل الدراسي الثاني 1443 هـ المدة: ثلاث ساعات

السؤال الأول : (8 درجات)

(1) اختبر تقارب أو تباعد كلٌ من المتتاليتين التاليتين: $\left\{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2}{n+1}\right\}$ ، $\left\{\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right\}$.

(2) اختبر تقارب أو تباعد كلٌ من المتسلسلات التالية:

(أ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n+\pi^n}{3^n}$ (ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+2}}$ (ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(د) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln 2n)^n}{n^{2n}}$

السؤال الثاني: (6 درجات)

(1) أوجد نصف قطر وفترة تقارب متسلسلة القوى التالية: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}(2x-5)^n$.

(2) مثل الدالة $f(x)=\frac{1}{7+4x}$ بمتسلسلة قوى وجد فترة تقاربها.

(3) استخدم متسلسلة ماكلورين لدالة جيب التمام التالية: $\sin t = t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,t^{2n+1}+\cdots,\ t\in\mathbb{R}$

لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل التالي: $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$.

السؤال الثالث: (7 درجات)

(1) لتكن f الدالة المعرفة بـ $f(x)=\begin{cases}0 & ;-\pi\le x\le 0\\ 1 & ;0<x\le\pi\end{cases}$ على الفترة $[-\pi,\pi]$، ولنفرض أنها دورية على $\mathbb{R}$ (أي $f(x+2\pi)=f(x)$).

(أ) جد متسلسلة فورييه (Fourier series) للدالة f على الفترة $(-\pi,\pi)$.

(ب) استنتج من (أ) قيمة المجموع التالي: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)}{2n+1}$

فضلا اقلب الورقة

(2) أوجد تكامل فورييه (Fourier integral) للدالة: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1 - x, & -1 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ على الفترة $(-\infty, \infty)$،

ثم استنتج قيمة التكامل المعتل: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha$.

السؤال الرابع: (19 درجة)

(1) إذا كانت $f(x, y) = e^{\frac{1}{x-2y}}$، فبين أن $2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

(2) أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

(أ) $yy' = x(y^2 + 1)$.

(ب) $y' = \frac{x+y-\sqrt{xy}}{x}, y > 0, x > 0$.

(ج) $(y - xy)dy - (x + y^2)dx = 0, x > 1$.

(د) $y' - 2xy = e^x(1 - 2x)$.

(هـ) $xy' + 2y - e^x\sqrt{y} = 0, x > 0, y > 0$.

لا يكتب في هذا الهامش

(د ايرطان)

تصحيح الاختبار النهائي 209 ريض للفصل الثاني 1443هـ

السؤال الأول: (8 درجات)

1

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2}{n+1}\right)=\infty-\infty$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(n+1)-n^2(n-1)}{n^2-1}$$

1

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^3}+n^2-\cancel{n^3}+n^2}{n^2-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2-1}=2$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{0}{0}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{\sin t}\qquad \left(t=\frac{1}{n}\right)$$

1

$$\overset{\text{قاعدة لوبيتال}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{\cos t}=0$$

2

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^n+\pi^n}{3^n}\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n\right)+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n\right)$$

$\sum_n\left(\frac{e}{3}\right)^n$ متقاربة متسلسلة هندسية $-1<r=\frac{e}{3}<1$

1,5

$\sum_n\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$ متباعدة متسلسلة هندسية $r=\frac{\pi}{3}>1$

فنستنتج أن $\left(\sum\frac{e^n+\pi^n}{3^n}\right)$ متباعدة

. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+2}}$ متسلسلة موجبة حيث $a_n=\frac{n}{\sqrt{n^5+2}}>0$ لكل $n\geq 0$

نستخدم اختبار نهاية المقارنة: نأخذ $b_n=\frac{n}{n^{5/2}}=\frac{1}{n^{3/2}}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ و $\sum b_n=\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ متسلسلة $p-$ متقاربة حيث $p=\frac{3}{2}>1$

1,5

فنستنتج أن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+2}}$ متقاربة.

لا يكتب في هذا الهامش

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة

حيث $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$ لكل $n \geq 1$

نستخدم اختبار النسبة:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(n+1)!}{n!}\right]^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n+1)^2 \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$$

1,5

فنستنتج أن $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$ متقاربة.

(د) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln(2n))^n}{n^{2n}} = \sum_{n=2} a_n$ متسلسلة موجبة

نستخدم اختبار الجذر:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(\ln 2n)^n}{n^{2n}}\right]^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2n)}{n^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

قاعدة لوبيتال $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{2x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 < 1$

1,5

وبالتالي $\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln 2n)^n}{n^{2n}}\right)$ متقاربة.

السؤال الثاني (6 درجات)

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} (2x-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$

حيث

$$a_n(x) = \frac{1}{n^2 3^n} (2x-5)^n$$

لا يكتب في
هذا الهامش

نستخدم اختبار النسبة:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2 3^{n+1}} |2x-5|^{n+1} \frac{n^2 3^n}{|2x-5|^n}$$

$$= \frac{|2x-5|}{3}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \frac{|2x-5|}{3} = L$$ لأن $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

• إذا كان $L<1 \Leftrightarrow \frac{|2x-5|}{3}<1 \Leftrightarrow |2x-5|<3$

(2) $\Leftrightarrow -3<2x-5<3 \Leftrightarrow 2<2x<8 \Leftrightarrow 1<x<4$

فإن المتسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا.

• إذا كان $x<1$ أو $x>4$ فإن المتسلسلة متباعدة.

• إذا كان $x=1$ فإن المتسلسلة تصبح بعد التعويض:

(0,5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}(2-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ وهي متسلسلة متردِّدة

متقاربة تقاربا مطلقا لأن $\sum\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum\frac{1}{n^2}$ متسلسلة p-حيث $p=2>1$

• إذا كان $x=4$ فإن المتسلسلة تصبح: $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)$ وهي متقاربة متسلسلة p- حيث $p=2>1$

(0,5) فنستنتج أن فترة التقارب هي $[1,4]$ ونصف قطر التقارب $R=\frac{4-1}{2}=3/2$

(2)

$$f(x) = \frac{1}{7+4x} = \frac{1}{7}\,\frac{1}{\left(1+\frac{4x}{7}\right)}$$

نعلم أن لكل $-1<u<1$ ، $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty}u^n$

(2) إذن $f(x) = \frac{1}{7+4x} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4x}{7}\right)^n \; ; \; -1<-\frac{4x}{7}<1$

فإن $f(x) = \frac{1}{7+4x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{7^{n+1}}x^n \; ; \; -7/4<x<7/4$

3 بما أن لكل $t\in\mathbb{R}$, $\sin t \sim t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}$

فإن $\sin(x^2) \sim x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!}$

1

وبالتالي $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx \sim \int_0^1 \left[x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120}\right] dx$

$$\sim \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{120\times 11}\right]_0^1$$

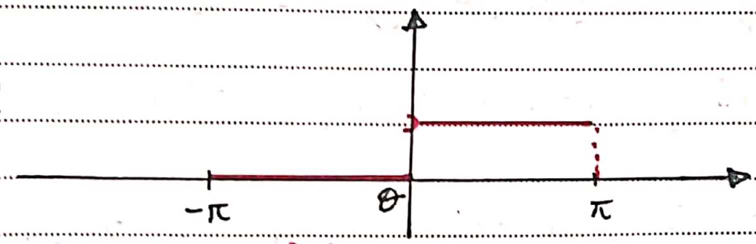
$$\sim \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320}\right]$$

السؤال الثالث (7 درجات)

1 (أ)

f لا زوجية ولا فردية على $[-\pi,\pi]$

$T=\pi$



بيان الدالة f

بما أن f متصلة على $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ فإن f تحظى بمتسلسلة فورية، لكل $x\in(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]$$

حيث

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx = \frac{1}{\pi}[x]_0^{\pi} = 1$$

ولكل $n\geq 1$

3

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \quad ; \quad \cos(n\pi) = (-1)^n$$

لذا $x \in (-\pi,\pi)\setminus\{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\sin(nx)\right]$$

$n = 2k+1$

$$(*) \qquad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin((2k+1)x)$$

ب) نأخذ قيمة $x=1$ في المعادلة $(*)$

$$f(1) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)}{2n+1}$$

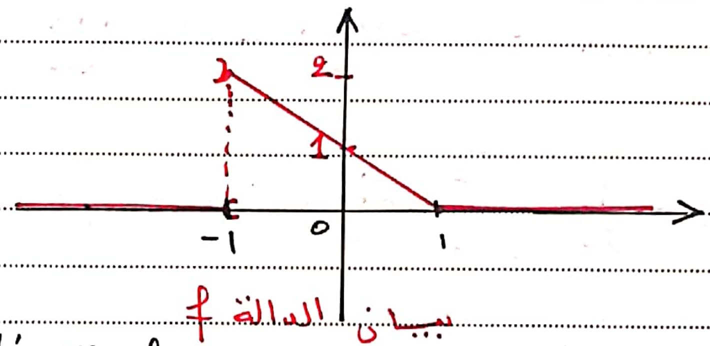
1

نجد أن

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)}{2n+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2

f لا زوجية ولا فردية على $\mathbb{R}$



بما أن f متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, f نعطي بتكامل فورييه

لذا $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\sin(\alpha x)\right]d\alpha$$

حيث

$$A(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

$$A(\alpha) = \int_{-1}^{1}(1-x)\cos(\alpha x)\,dx$$

$u(x) = 1-x \qquad u'(x) = -1$

$v'(x) = \cos(\alpha x) \Rightarrow v(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Big[(1-x)\sin(\alpha x)\Big]_{-1}^{1} + \frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{1}\sin(\alpha x)\,dx$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left[0 - 2\sin(-\alpha)\right] + \frac{1}{\alpha}\left[-\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}\right]_{-1}^{1}$$

$$A(\alpha) = \frac{2\sin\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\left[\cos\alpha - \cos(-\alpha)\right] = \frac{2\sin\alpha}{\alpha}$$

because $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

لا يكتب في هذا الهامش

$$B(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(\alpha x)\, dx$$

$$B(\alpha) = \int_{-1}^{1} (1-x) \sin(\alpha x)\, dx$$

$u(x) = 1-x \qquad \Rightarrow \qquad u'(x) = -1$

$v'(x) = \sin(\alpha x) \qquad\qquad v(x) = -\dfrac{\cos(\alpha x)}{\alpha}$

$$B(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\Big[(1-x)\cos(\alpha x)\Big]_{-1}^{1} - \frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{1}\cos(\alpha x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\Big[0 - 2\cos(-\alpha)\Big] - \frac{1}{\alpha^2}\Big[\sin(\alpha x)\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2\cos\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\Big[\sin\alpha - \sin(-\alpha)\Big]$$

$$B(\alpha) = \frac{2\cos\alpha}{\alpha} - \frac{2\sin\alpha}{\alpha^2}$$

2,5

لكل $x \neq -1$,

$$(*) \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2\sin\alpha}{\alpha}\cos(\alpha x) + \left(\frac{2\cos\alpha}{\alpha} - \frac{2\sin\alpha}{\alpha^2}\right)\sin(\alpha x)\right] d\alpha$$

بتعويض قيمة x بـ 0 في $(*)$,

0,5 $\quad f(0) = 1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha$

وبالتالي

$$\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha\right) = \frac{\pi}{2}$$

السؤال الرابع (19 درجة)

(1) $f(x,y) = e^{\frac{1}{x-2y}}$ معرفة ومتصلة وقابلة للتفاضل على $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x-2y \neq 0\}$. ليكن $(x,y) \in D_f$,

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x-2y}\right) \cdot e^{\frac{1}{x-2y}}$$

$$= -\frac{1}{(x-2y)^2}\, e^{\frac{1}{x-2y}}$$

لا يكتب في
هذا الهامش

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x-2y}\right) \cdot e^{\frac{1}{x-2y}}$$

1,5

$$= \frac{2}{(x-2y)^2} \, e^{\frac{1}{x-2y}}$$

إذاً

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{(x-2y)^2} e^{\frac{1}{x-2y}} + \frac{2}{(x-2y)^2} e^{\frac{1}{x-2y}}$$

0,5

$$= 0$$

2 (أ) $yy' = x(y^2+1)$; $y' = \frac{dy}{dx}$

1

هي معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة

$$\frac{y\,dy}{y^2+1} = x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\ln(1+y^2) = x^2 + a \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

2

$$1+y^2 = A\,e^{x^2}$$

$$y = \pm\sqrt{A\,e^{x^2} - 1}$$

(ب) $f(x,y) = \frac{x+y-\sqrt{xy}}{x} = y'$ (*) ; $x>0$, $y>0$

نضع $y = ux$,

$$f(x,ux) = \frac{x+ux-\sqrt{u\,x^2}}{x}$$

$\sqrt{x^2} = |x| = x$
$x>0$

$$f(x,ux) = 1+u-\sqrt{u} = F(u)$$

1

و بالتالي (*) هي معادلة تفاضلية متجانسة.

$$\frac{du}{F(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{du}{1-\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$$

$V = \sqrt{u}$
$dV = \frac{1}{2\sqrt{u}}du$
$du = 2V\,dV$

$$\int \frac{du}{1-\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2V\,dV}{1-V} = \ln(Ax) \quad ; \quad A>0$$

لا يكتب في هذا الهامش

$$\int\left[-2+\frac{2}{1-v}\right]dv = -2v-2\ln|1-v|$$

إذن $\quad -2\sqrt{u}-2\ln|1-\sqrt{u}| = \ln(Ax)$

2

بما أن $u = y/x$ فإن الحل العام هو:

$$-2\sqrt{y/x}-2\ln\left|1-\sqrt{y/x}\right| = \ln(Ax)\ , \quad A>0$$

(ج) $\quad (y-xy)\,dy-(x+y^2)\,dx=0 \ (\star)\ ; \quad x>1$

تكتب على الشكل

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ حيث

$M(x,y) = -(x+y^2)$ كثيرات حدود

$N(x,y) = y-xy$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -2y \ ; \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = -y$$

1

بما أن $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ فإن $(\star)$ هي غير تامة.

العامل التكاملي μ هو:

$$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{y(1-x)}(-2y+y) = \frac{1}{x-1}$$

$$x>1, \quad \mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{x-1}} = e^{\ln(x-1)} = x-1$$

1

بضرب طرفي $(\star)$ بالعامل التكاملي،

$$(\star\star)\quad (\underbrace{x+y^2-x^2-xy^2}_{M_1})\,dx + (\underbrace{-x^2y+2xy-y}_{N_1})\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}(x,y) = 2y-2xy$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}(x,y) = -2xy+2y$$

إذن $(\star\star)$ هي معادلة تفاضلية تامة فإنه يوجد دالة

لا يكتب في هذا الهامش

$dF = M_1\,dx + N_1\,dy$ بحيث $F(x,y)$

يعني لدينا

$$(1)\ \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M_1(x,y) = x+y^2-x^2-xy^2 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N_1(x,y) = -x^2y+2xy-y \end{cases}\ (2)$$

بتكامل طرفي (1) بالنسبة لـ x،

$$F(x,y) = \int (x+y^2-x^2-xy^2)\,dx$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2}+xy^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}y^2+\varphi(y)$$

2

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ y،

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2xy - x^2y + \varphi'(y) = 2xy - x^2y - y$$

إذن $\varphi'(y) = -y$ يعني $\varphi(y) = -\frac{y^2}{2}$

الحل العام لـ ☆ هو $F(x,y)=c$ يعني

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{2}+xy^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^2}{2}=c$$

حيث $a\in\mathbb{R}$ $\boxed{3x^2+6xy^2-2x^3-3x^2y^2-3y^2=a}$

هي معادلة تفاضلية خطية $y' - 2xy = e^{x}(1-2x)$ (د)

1) تكتب على الشكل $y'+P(x)y=Q(x)$ حيث $P(x) = -2x$

$Q(x) = e^{x}(1-2x)$

العامل التكميلي:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

1

$$\mu(x) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

الحل العام هو:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(t)\,Q(t)\,dt$$

$$= e^{x^2}\left(\int e^{-t^2}\,e^{t}(1-2t)\,dt\right)$$

2

$$= e^{x^2}\left(\int e^{(t-t^2)}(1-2t)\,dt\right) = e^{x^2}\left(e^{x-x^2}+c\right)$$

لا يكتب في هذا الهامش

$$y(x) = \underbrace{e^{x}}_{y_p} + \underbrace{c\, e^{x^2}}_{y_c} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

ب)

$y>0$, $x>0$, $x y' + 2y - e^{x}\sqrt{y} = 0$

$$x y' + 2y = e^{x}\sqrt{y}$$

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{e^{x}}{x}\sqrt{y}$$ وهي معادلة بيرنولي

$n = 1/2$

1

$\frac{y}{\sqrt{y}} = \sqrt{y}$; $y>0$ $(*)$ $$\boxed{\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{2}{x}\sqrt{y} = \frac{e^{x}}{x}}$$

نضع $z = \sqrt{y}$ فإن $z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$

$(*)$ تصبح :

$$2z' + \frac{2}{x} z = \frac{e^{x}}{x}$$ يعني

$(**)$ $$\boxed{z' + \frac{1}{x} z = \frac{e^{x}}{2x}}$$ وهي معادلة تفاضلية خطية

العامل التكاملي

1

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

والحل العام لـ $(**)$ هو

$$z(x) = \frac{1}{x}\left(\int t \,\frac{e^{t}}{2t}\, dt\right)$$

$$z(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}e^{x} + c\right]$$

$$z(x) = \frac{e^{x}}{2x} + \frac{c}{x} = \sqrt{y}$$

1

فإن حل المعادلة التفاضلية هو

$$x>0 , \quad y(x) = \left(\frac{a+e^{x}}{2x}\right)^{2} , \quad a \in \mathbb{R}$$