الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم

I - التحليل الرياضي

II- الجبر

إعداد

هيئة التأطير بالمعهد السيد:

د.أ.أ أبو بكر خالد سعد الله

السنة : 2008/2007

4 - شارع أولاد سيدي الشيخ - الحراش- الجزائر

الموقع على الأنترنت: http//www.infpe.edu.dz

البريد الإلكتروني: contact@infpe.edu.dz

I

التحليـــل الرياضـــي

عناوين الدرس

تقديم :

كُتب هذا الدرس في التحليل وفق البرنامج المسطر من طرف وزارة التربية الوطنية الهادف إلى تكوين مفتشي التعليم المتوسط في مادة الرياضيات. ومن المهم أن نلاحظ هنا بأن البرنامج الرسمي يشمل في الواقع وحدتين، هما : 1) المتتاليات، 2) الحساب التكاملي. غير أنه من المعلوم بأن الإلمام بمفهوم الاستمرار والاشتقاق (سيما أن البرنامج يطلب مثلا تقديم المكاملة بالتجزئة) ضروري لتقديم ودراسة التكاملات. وعليه ارتأينا تناول موضوع الاستمرار والاشتقاق قبل التكامل. ذلك ما يعالجه الفصل الثاني. وبطبيعة الحال فالاستمرار لا يمكن تقديمه قبل تقديم مفهوم النهاية. ولذا يجد القارئ حديثا عن الدوال والنهايات في بداية الفصل الثاني. وقد اعتبرنا هذا الفصل فصل "مراجعة".

ومن جهة أخرى، يشير البرنامج في الوحدة الثانية إلى حساب طول قوس وحساب "المساحات والحجوم". فأما حساب طول قوس منحنى فهذا ما قدمناه في الجزء الأخير من الفصل الثالث. ولعل القارئ يلاحظ أننا لم نتطرق للدالة الشعاعية، وهو موضوع مهم لاستيعاب طريقة تعريف القوس والمنحني، إلا أن البرنامج لم يشر لهذا النوع من الدوال.

وفي ما يخص حساب المساحات، فإذا كانت المساحة المشار إليها مساحة سطح مستو محدود ببيان دالة فحسابها يأتي مباشرة من تكامل

ريمان كما هو موضح ضمن الدرس. لكن حساب مساحة سطح غير مستو (في الفضاء) وحساب الحجوم يتطلب إدخال التكاملات المضاعفة (الثنائية والثلاثية، ...) بكثير من التفاصيل. إلاّ أننا لم نجد إشارة في البرنامج إلى هذا النوع من التكاملات. فكيف بنا نقدم هذا الموضوع بدون الأدوات اللازمة؟

ثم إن البرنامج يشير إلى المدة المخصصة لمادة التحليل فيحددها بـــ 48 ساعة ! وهي مدة لا تسمح بالتطرق لتلك الأدوات. لذلك كله اكتفينا هنا بتقديم مساحات وحجوم الأشكال والمجسمات المألوفة، مثل المخروط والاسطوانة والكرة، دون تفصيل الطرق الحسابية المستخدمة للتكاملات.

نوصي أن تقدم "الثغرات" الموجودة في البرنامج كمواضيع دراسة للطلبة المفتشين. ومن تلك المواضيع نقترح : 1) خواص الدوال الشعاعية، 2) التكامل الثنائي (تعريفه وخواصه)، 3) التكامل الثلاثي (تعريفه وخواصه)، 4) استعمال التكاملات لحساب مساحات السطوح غير المستوية، 5) استعمال التكاملات المضاعفة لحساب الحجوم، الخ.

نتمنى أن يكون هذا الدرس مفيدا للطالب المفتش.

أبو بكر خالد سعد الله

قسم الرياضيات

المدرسة العليا للأساتذة، القبة، الجزائر

الفصل الأول

المتتاليات

1- مقدمة

2- تعاريف

3- نتائج وخواص

4- تطبيق

5- خواص أخرى للدالة الأسية

6- موضوع للدراسة

7- تمارين

1. مقدمة :

لا شك أن المتتاليات تعتبر من أهمّ الأدوات المستخدمة في كافة البراهين الواردة في الرياضيات بجميع فروعها. ذلك أنها تتميّز بصفة "التقطع" الناجمة عن ارتباط المتتاليات بالأعداد الطبيعية التي يدركها فكرنا أكثر مما يدرك الأعداد الأخرى كالأعداد الجذرية أو الحقيقية أو المركبة (العقدية). ولعل أفضل دليل على ذلك ظهور واستخدام الأعداد الطبيعية قبل سائر أنماط الأعداد الأخرى.

والملاحظ أن الرياضيين ليسوا الوحيدين الذين يفضلون العمل بالمتتاليات بدل الأدوات الأخرى (كالدوال مثلا). أنظر إلى الجغرافيين والإحصائيين والفيزيائيين وغيرهم من العاملين في حقول المعرفة المختلفة ... إنهم جميعا يستخدمون المتتاليات ولا يلجؤون إلى الدوال إلا عند الضرورة. ومن لم يسمع مثلا بمتتالية فيبوناتشي Fibonacci (1170–1250)، أي المتتالية التي يكون أي عنصر منها يساوي مجموع العنصرين السابقين له، مع العلم أن العنصرين الأول والثاني معلومان)؟ إنها متتالية تدخل في توزيع وتنظيم مواقع ورق بعض النباتات حول الأغصان. والأغرب من ذلك أن هذا التوزيع يضمن وصول أشعة الشمس بأكبر قدر ممكن إلى أوراق هذه النباتات. وقد أثبت R. Jones عام 1975 بأن عناصر هذه المتتالية تمثل جذورا لكثيرات حدود من الدرجة الخامسة.

كما أن لهذه المتتاليات صلة بقانون توالد بعض الحيوانات كالأرانب. ومن المعلوم أن فيبوناتشي أثبت أن متتاليته تمثل حلا للمسألة التالية : كم زوجا من الأرانب يمكن الحصول عليها خلال سنة عندما يكون لنا في البداية زوج واحد وإذا علمنا أن كل زوج يلد زوجا آخر كل شهر؟

أين نجد المتتاليات في الرياضيات؟ إنها موجودة على سبيل المثال في :

– مفهوم الكثافة : كثافة مجموعة جزئية من فضاء طبولوجي في نفس الفضاء أو فضاء آخر. فأنت إذا أردت مثلا إثبات مساواة أو متباينة في مجموعة الأعداد الحقيقية يكفيك في أغلب الأحيان أن تثبتها في مجموعة الأعداد الناطقة، وهذا بفضل كثافة هذه المجموعة الأخيرة في مجموعة العداد الحقيقية.

– دراسة المعادلات التفاضلية : نحصل على حلول هذه المعادلات في الكثير من الأحيان كنهايات متتاليات تقربنا شيئا فشيئا من الحل الدقيق.

– الحساب (أو التحليل) العددي : التقريبات وتقديرات الأخطاء تتم عموما عبر المتتاليات.

– تعريف مفاهيم رياضية أخرى : الانتقال مثلا من تعريف مفهوم المكاملة للدالة معرفة على مجال حقيقي وتأخذ قيمها في فضاء مجرد

– فضاء باناخي Banach (1892–1945) مثل $\mathbb{R}^n$ – يمر عبر المتتاليات.

ومن التطبيقات التي نجدها في المتتاليات أنها تمكن من تعريف العديد من الدوال المألوفة مثل

– الدالة الأسية،
– الدالة المثلثية جب،
– الدالة المثلثية تجب،
– الدالة اللوغاريتمية (بوصفها الدالة العكسية للدالة الأسية)،
– الدالة المثلثية ظل (بوصفها نسبة للدالتين المثلثيتين جب و تجب).

ولعله من المفيد أن نتساءل هنا : هل من المؤكد أن مفهوم الدالة (أو التطبيق) أقرب لذهن التلميذ من مفهوم المتتالية؟ إذا كان الجواب بالنفي، فلماذا يتأخّر تقديم هذا المفهوم للتلميذ مقارنة بمفهوم الدالة؟

2. تعاريف :

تعريف (المتتالية)

- يسمى كل تطبيق من مجموعة الأعداد الطبيعية في مجموعة الأعداد الحقيقية متتالية حقيقية.
- يسمى كل تطبيق من مجموعة الأعداد الطبيعية في مجموعة الأعداد المركبة متتالية مركبة.
- يسمى كل تطبيق من مجموعة الأعداد الطبيعية في مجموعة أعداد (طبيعية أو صحيحة أو ناطقة أو حقيقية أو مركبة) متتالية عددية.
- نقول عن متتالية حقيقية (u_n) إنها متزايدة (متناقصة، على الترتيب) إذا كان $u_n \leq u_{n+1}$ ($u_n \geq u_{n+1}$ ، على الترتيب) من أجل كل n في مجموعة الأعداد الطبيعية.
- نقول عن متتالية حقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأعلى إذا وجد ثابت M موجب بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leq M\ .$$

- نقول عن متتالية حقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأدنى إذا وجد ثابت M بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geq M\ .$$

- نقول عن متتالية عددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة إذا وجد ثابت M موجب بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n| \leq M\ .$$

ملاحظات :

1. نحافظ على مصطلح متتالية حتى لو انطلق التطبيق من جزء من مجموعة الأعداد الطبيعية. ونشير عادة الى المتتاليات برمز، مثل (u_n)، دون الإشارة إلى مجموعة تعريفها إلا إذا دعت الضرورة إلى ذلك.

2. يمكن إثبات أن متتالية حقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تكون محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة في آن واحد من الأعلى ومن الأدنى.

3. سوف نعتبر، في ما يلي، المتتاليات معرفة على كامل مجموعة الأعداد الطبيعية إلا إذا أشرنا إلى عكس ذلك.

احذر : لا يجوز أن نتحدث عن رتابة متتالية إذا أخذت قيما عقدية (مركبة) غير حقيقية ... ذلك أن المجموعة $\mathbb{C}$ غير مرتبة ترتيبا "طبيعيا" !

أمثلة :

1) إليك بعض العبارات التي تعرف متتاليات : $u_n = (-1)^n$ ،
$u_n = \sqrt{n}$ ، $u_n = \frac{1}{n+2}$ ، $u_n = -\frac{\sqrt{n}}{n+2}$ ، $u_n = (-1)^n i + \frac{n^2}{n^3+1}$.

2) حول المتتاليتين الحسابية والهندسية : تعرف المتتاليتان الحسابية والهندسية بالعلاقتين : $u_n = u_{n-1} + r$ حيث r ثابت و $n \in \mathbb{N}^*$ (متتالية حسابية أساسها r)، و $u_n = au_{n-1}$ حيث a عدد غير منعدم و $n \in \mathbb{N}^*$ (متتالية هندسية أساسها a). لاحظ أنه يمكن كتابة الحد العام للمتتالية الحسابية على الشكل $u_n = nr$ وكتابة الحد العام للمتتالية الهندسية على الشكل : $u_n = a^n$، أي أن :

$u_n = u_{n-1} + r$ تكافئ $u_n = nr$،

$u_n = au_{n-1}$ تكافئ $u_n = a^n$.

3) حول الرتابة :

- المتتالية $u_n = (-1)^n$ غير رتيبة.
- المتتالية $u_n = \sqrt{n}$ متزايدة.
- المتتالية $u_n = \dfrac{1}{n+2}$ متناقصة.
- المتتالية $u_n = -\dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$ متزايدة.
- المتتالية $u_n = (-1)^n i + \dfrac{n^2}{n^3+1}$ غير رتيبة.

سوف نعتبر، في ما يلي، المتتاليات معرفة على كامل مجموعة الأعداد الطبيعية إلا إذا أشرنا إلى عكس ذلك.

تعريف (التقارب)

– نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها متقاربة إذا وجد عدد u بحيث
$\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-u|=0$ **أي**

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ \ n\geq n_0\ \ \Rightarrow\ \ |u_n-u|<\varepsilon.$$

– نقول عن متتالية إنها متباعدة عندما لا تكون متقاربة.

تعميم :

- نقول إن متتالية (u_n) تؤول إلى $+\infty$ إذا كان :

$$\forall A>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\ \ \Rightarrow\ \ u_n>A.$$

– نقول إن متتالية (u_n) تؤول إلى $-\infty$ إذا كان :

$$\forall A<0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\ \ \Rightarrow\ \ u_n<A.$$

ملاحظة :

– لا نقول في الحالتين الأخيرتين إن المتتالية متقاربة، بل نقول إنها متباعدة. فعلى سبيل المثال نلاحظ أن المتتالية الحسابية المعرفة بــــ $u_n=u_{n-1}+r$ حيث r ثابت و $n\in\mathbb{N}^*$، أي $u_n=nr$ متباعدة إلا في حالة $r=0$. أما المتتالية الهندسية $u_n=au_{n-1}$ (حيث a عدد غير منعدم و $n\in\mathbb{N}^*$) أي $u_n=a^n$ فهي متقاربة نحو 0 من أجل $|a|<1$ ومتقاربة نحو 1 من أجل $a=1$. والمتتالية متباعدة في ما عدا ذلك من الحالات.

– نكتفي عادة في المتتاليات بكتابة $\lim\limits_{n}|u_n-u|=0$ بدل $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-u|=0$ لأن n يؤول دائما إلى $+\infty$.

– يمكن دائما ردّ تقارب متتالية عقدية إلى تقارب متتالية حقيقية ... يكفي اعتبار الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.

مثال :

1) نبيّن أن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_n = \frac{1}{n}$ متقاربة نحو 0.

الإثبات : نكتب $|u_n - u| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. وهذا يؤدي إلى $n > \frac{1}{\varepsilon}$. إذن يكفي أن نختار $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ ، مثلا : $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. وكما أشرنا فإن أي عدد طبيعي أكبر من $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ صالح أن يكون قيمة لـ n_0 لأنه يحقق بالضرورة التعريف.

2) أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$ متقاربة نحو 3.

الإثبات : نكتب

$$|u_n - u| = \left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{-1-3}{n+1}\right| = \frac{4}{n+1} < \frac{4}{n} < \varepsilon .$$

ومنه يأتي أن $n > \frac{4}{\varepsilon}$. إذن يكفي أن نختار $n_0 > \frac{4}{\varepsilon}$، مثلا $n_0 = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$.

ملاحظة

إذا اهتممنا بالحساب التقريبي للنهاية u لمتتالية متقاربة (u_n)، وكانت هذه المتتالية رتيبة فبقدر ما يكبر n بقدر ما يكون u_n قريبا من النهاية u. فعلى سبيل المثال نجد أن u_{100} أقرب إلى النهاية من u_{99}. إما إذا كانت المتتالية غير رتيبة فهذه الخاصية خاطئة حيث يجوز أن يكون u_{99} أقرب إلى النهاية من u_{100}. غير أن هذا لا يمنع أنه عندما تكون n كبيرة فإن u_n سيكون قريبا من النهاية u، بمعنى أن $|u-u_n|$ سيكون صغيرا جدا حتى لو كانت المتتالية عقدية.

تعريف (المتتالية الجزئية)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية. نقول عن متتالية (v_n) إنها مستخرجة من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (أو إنها جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) إذا وجد تطبيق $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ متزايد تماما بحيث

$$\forall n\in\mathbb{N}:\quad v_n=u_{f(n)}.$$

مثال

المتتالية $u_{2n}=1$ هي متتالية جزئية من المتتالية $u_n=(-1)^n$. وكذلك شأن المتتالية $u_{2n+1}=-1$.

تعريف (المتتالية الكوشية)

نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها كوشية، أو لكوشي Cauchy (1789–1857) ، إذا كان :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N}:\quad n\ge n_0\ \wedge\ m\ge n_0\ \Rightarrow\ |u_n-u_m|<\varepsilon$$

يمكن أيضا التعبير عن هذه العلاقة بالكتابة :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N}:\quad n\ge n_0\ \wedge\ p\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ |u_{n+p}-u_n|<\varepsilon$$

3. نتائج وخواص :

نظرية (وحدانية النهاية)

إذا تقاربت متتالية عددية فإن نهايتها وحيدة.

البرهان

لنتأكد من ذلك بالخلف (نكتفي هنا باعتبار حالة المتتاليات الحقيقية) : نفرض وجود نهايتين مختلفتين u و u' لمتتالية (u_n) باعتبار مثلا أن $u<u'$. ولنختر في التعريف السابق $\varepsilon=\dfrac{u'-u}{2}$. ومن ثمّ

فإن

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\ :\quad n\geq n_0 \quad\Rightarrow\quad |u_n-u|<\varepsilon$$
$$\exists n_0'\in\mathbb{N}\ :\quad n\geq n_0 \quad\Rightarrow\quad |u_n-u'|<\varepsilon$$

وعندما نضع $N=\max(n_0,n'_0)$ نستنتج

$$n\geq N \quad\Rightarrow\ u'-\frac{u'-u}{2}<u_n<u+\frac{u'-u}{2}$$

أي :

$$n\geq N \quad\Rightarrow\ \frac{u'+u}{2}<u_n<\frac{u'+u}{2}$$

وفي العلاقة السابقة تناقض واضح. ومنه المطلوب.

إليك هذه الخواص المتعلقة بالتقارب، وهي خواص نستعملها بكثرة في البراهين ودراسة طبيعة المتتاليات، وأحيانا دون أن ندري.

نطلب من القارئ العمل على إثباتها :

عندما تكون متتاليتان عدديتان (u_n) و (v_n) متقاربتين (نؤكد هنا على ضرورة تقارب المتتاليتين) فإن :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n+\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ ،

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ ،

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\times\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ ،

4) من أجل كل عدد λ (حقيقي أو عقدي)

: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda v_n)=\lambda\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ ،

5) عندما يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n\neq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n}$ ،

6) $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=\left|\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\right|$ ،

7) إذا كان $u_n\leq v_n$ ابتداء من رتبة معينة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\leq\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

ملاحظة

نستخلص من الخاصية 7) أن :

$$u_n\leq 0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}u_n\leq 0$$
$$u_n\geq 0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}u_n\geq 0,$$

وتصدق هاتان العلاقتان حتى إن تحقق طرفاها الأولان ابتداء من رتبة معينة ليست بالضرورة الرتبة 0 .

احذر : إذا كان $u_n > 0$ ابتداء من أول رتبة أو ابتداء من رتبة معينة فهذا يؤدي إلى $\lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0$ ... ولا يؤدي بالضرورة إلى $\lim_{n\to+\infty} u_n > 0$. للتأكد من ذلك خذ $u_n = \dfrac{1}{n}$ الموجبة تماما لكن ذلك لم يمنع انعدام نهايتها.

نظرية (التقارب والمحدودية)

كل متتالية عددية متقاربة متتالية محدودة. والعكس غير صحيح.

البرهان

للتأكد من ذلك نكتب أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو عدد u، أي أن

$$\forall\varepsilon > 0,\quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \;:\; n \geq n_0 \quad\Rightarrow\quad |u_n - u| < \varepsilon$$

ثم نختار في هذه العلاقة $\varepsilon = 1$ مثلا، فيكون

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \;:\; n \geq n_0 \quad\Rightarrow\quad |u_n - u| < 1$$

ومنه :

$$n \geq n_0 \quad\Rightarrow\quad |u_n| < 1 + |u|.$$

ليكن K حادا من الأعلى للمجموعة $\left\{|u_0|,\ |u_1|, \ldots,\ |u_{n_0-1}|\right\}$ و $M = \max\{1+|u|, K\}$. لاحظ عندئذ أن:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M\ .$$

وهو المطلوب.

العكس غير صحيح : المثال المضاد البسيط والشهير يتمثل في المتتالية $u_n = (-1)^n$ التي سيتناولها المثال 1) الموالي.

أمثلة :

1) المتتالية $u_n=(-1)^n$ غير متقاربة (وهي محدودة). يمكن تبرير ذلك بالخلف، كما يلي : نفرض وجود نهاية u لهذه المتتالية. تستفيد من العلاقة

$$(0)\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in IN\ :\quad n\geq n_0\quad\Rightarrow\quad |u_n-u|<\varepsilon$$

باعتبار أولا n زوجيا فيأتي

$$(1)\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in IN\ :\quad n\geq n_0\quad\Rightarrow\quad |1-u|<\varepsilon$$

عندئذ نلاحظ أن (1) تستلزم $u=1$.

ثم باعتبار n فرديا يأتي :

$$(2)\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in IN\ :\quad n\geq n_0\quad\Rightarrow\quad |-1-u|<\varepsilon$$

عندئذ نلاحظ أن (2) تستلزم $u=-1$. وبما إننا لا نستطيع الحصول على $u=1$ و $u=-1$ في آن واحد نستنتج أن العلاقة (0) مستحيلة. وبالتالي فالمتتالية متباعدة.

2) المتتالية $u_n=\sqrt{n}$ متباعدة. يمكن ملاحظة أنها تؤول إلى $+\infty$ (وهذا لا يعني أنها متقاربة لأن التقارب يستوجب أن تكون النهاية في $\mathbb{R}$ ... و $+\infty$ لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$). كيف نبرر أنها تؤول إلى $+\infty$؟ خذ أي عدد ε موجبا (مهما كان كبيرا). يوجد دوما عدد طبيعي n_ε بحيث : $n\geq n_\varepsilon \Leftarrow \sqrt{n}>\varepsilon$. يكفي اختيار مثلا $n_\varepsilon=([\varepsilon]+2)^2$. تأكد من ذلك.

3) المتتالية $u_n = \frac{1}{n+2}$ متقاربة نحو 0. ذلك أنه يكفي أن نختار في العلاقة (0) : $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

4) المتتالية $u_n = -\frac{3n}{n+2}$ متقاربة نحو 3 . ذلك أنه يكفي أن نختار في العلاقة (0) : $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$.

5) المتتالية $u_n = (-1)^n i + \frac{n^2}{n^3+1}$ غير متقاربة. تأكد من ذلك بالاستفادة من تباعد المتتالية $u_n = (-1)^n i$.

نظرية (كوشي والتقارب)

تكون متتالية عددية متقاربة إذا وفقط إذا كانت كوشية.

ملاحظة

تعود أهمية نظرية كوشي إلى أنها تسمح بدراسة طبيعة متتالية (أي معرفة ما إذا كانت متقاربة أم متباعدة) دون معرفة نهايتها (في حالة تقاربها).

البرهان

* أولا : إذا كانت (u_n) متقاربة نحو u فإننا نستطيع كتابة

$$\begin{aligned}\left|u_p-u_q\right| &= \left|(u_p-u)+(u-u_q)\right| \\ &\leq \left|u_p-u\right|+\left|u-u_q\right|.\end{aligned}$$

وبالمرور إلى النهاية في الطرفين نجد :

$$0 \leq \lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}}\left|u_p-u_q\right| \leq \lim_{p\to+\infty}\left|u_p-u\right|+\lim_{q\to+\infty}\left|u-u_q\right| = 0+0,$$

لأن $\lim_{p\to+\infty}\left|u_p-u\right|=0$ و $\lim_{q\to+\infty}\left|u-u_q\right|=0$ بفضل تقارب المتتالية. ومنه $\lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}}\left|u_p-u_q\right|=0$.

* ثانيا : يتطلب هذا الجزء من البرهان الإلمام بمفهوم المتتاليات المتجاورة وبعض خواصها (نطلب من القارئ البحث عن هذا المفهوم في المراجع الواردة في ذيل الدرس). نفرض الآن أن شرط كوشي محقق، أي أن $\lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}}\left|u_p-u_q\right|=0$. والمطلوب إثبات تقارب المتتالية. نفترض أن المتتالية حقيقية (يكفي اعتبار متتاليتي الجزء الحقيقي والجزء التخيلي في حالة متتالية عقدية). نثبت في البداية أن شرط كوشي يؤدي إلى محدودية المتتالية.

ليكن $\varepsilon>0$ مثبتا. وليكن n_0 العدد الطبيعي الموافق لـــ ε في شرط كوشي، أي العدد الذي يحقق

$$p \geq n_0 \ \wedge \ q \geq n_0 \Rightarrow \left|u_p-u_q\right|<\varepsilon$$

نختار في هذه العلاقة $p=n_0$ فيأتي

$$q \geq n_0 \Rightarrow \left|u_q\right|<\left|u_{n_0}\right|+\varepsilon$$

وبالتالي فكل عناصر المتتالية التي دليلها أكبر من n_0 محدودة. ثم إن المجموعة المنتهية $\{u_0, u_1, ..., u_{n_0-1}\}$ محدودة بأكبر عنصر فيها. ومنه فالمتتالية (u_n) محدودة.

لنضع الآن، من أجل كل عدد طبيعي n :

$$A_n = \{u_k : k \geq n\} \subset \mathbb{R} .$$

بما أن المتتالية (u_n) محدودة فإن المجموعة A_n محدودة. ولذلك فلها حد أدنى نرمز إليه بـــ a_n وحد أعلى نرمز إليه بـــ b_n. لاحظ صحة العلاقة التالية :

$$A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] .$$

وبذلك نرى أن المجالات $[a_n, b_n]$ متداخلة، وعليه فإن (a_n) متزايدة و (b_n) متناقصة.

ومن جهة أخرى يمكن – باعتبار $0 < \varepsilon$ مثبتا و n_0 العدد الطبيعي الموافق لـــ ε في شرط كوشي و $n_0 \leq n$ - كتابة ما يلي (حسب الخاصية المميزة لكل من الحد الأدنى والأحد الأعـــلى) :

$$\exists p \geq n, \quad u_p < a_n + \varepsilon$$
$$\exists q \geq n, \quad u_q > b_n - \varepsilon,$$

ومنه ينتج بعد كتابة :

$$b_n - a_n = (b_n - u_q) + (u_q - u_p) + (u_p - a_n)$$

أن :

$$b_n - a_n \leq (b_n - u_q) + |u_q - u_p| + (u_p - a_n)$$
$$< 3\varepsilon.$$

ولذا يتضح أن لدينا العلاقة :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |b_n - a_n| < 3\varepsilon$$

التي تعني أن $\lim_{n \to +\infty} |b_n - a_n| = 0$. وبالتالي فالمتتاليتان (a_n) و (b_n) متجاورتان (تذكر أن (a_n) متزايدة و (b_n) متناقصة). إن النهاية المشتركة لهما هي نهاية المتتالية (u_n) لأن تعريف A_n و (a_n) و (b_n) يبيّن أن :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \leq u_n \leq b_n\ .$$

والمرور إلى النهاية في العلاقة السابقة يثبت تقارب (u_n) و $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} b_n$. وبذلك ينتهي برهان النظرية.

نظرية (التقارب والرتابة)

كل متتالية حقيقية رتيبة ومحدودة متتالية متقاربة، ولدينا :

– إذا كانت متزايدة ومحدودة فالنهاية تساوي الحد الأعلى للمتتالية.

– إذا كانت متناقصة ومحدودة فالنهاية تساوي الحد الأدنى للمتتالية.

البرهان

نعتبر متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة. لاحظ أن تزايد المتتالية يؤدي حتما إلى أنها محدودة من الأدنى بحدها الأدنى. ولذا يمكن الإدراك بأن وجود الحد الأعلى $\sup u_n$ هو الأهم في هذا السياق. كيف نعبر عن خاصيته المميزة؟ إنها تكتب على الشكل :

$$(1)\ \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \sup u_n-\varepsilon<u_{n_0}\le\sup u_n<\sup u_n+\varepsilon$$

ثم نلاحظ بفضل تزايد المتتالية أن :

$$(2)\quad n\ge n_0\ \Rightarrow\ u_n\ge u_{n_0}$$

وعندما ندمج (1) و (2) نحصل على :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\ge n_0\Rightarrow$$
$$\sup u_n-\varepsilon<u_{n_0}\le u_n\le\sup u_n<\sup u_n+\varepsilon$$

التي يمكن اختصارها في الكتابة

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\ge n_0\Rightarrow\sup u_n-\varepsilon<u_n<\sup u_n+\varepsilon$$

المعبرة عن أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $\sup u_n$.

يمكن البرهان بطريقة مماثلة على الجزء المتبقي من النظرية.

نظرية (الحصر)

إذا كانت لدينا ثلاث متتاليات حقيقية تحقق

$$\begin{cases} v_n\le u_n\le w_n\\ \lim v_n=\lim w_n=k\\ k\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

فإن (u_n) متقاربة ونهايتها هي k.

البرهان

ليكن $\varepsilon>0$. إن تقارب المتتاليتين (v_n) و (w_n) نحو k يؤدي إلى وجود عددين طبيعيين m و m' بحيث

$$n\ge m\ \Rightarrow\ |v_n-k|<\varepsilon$$
$$n\ge m'\ \Rightarrow\ |w_n-k|<\varepsilon$$

لنضع n_0 أكبر العددين m و m'. تأكد عندئذ أن

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n - k| < \varepsilon$$

ومنه تقارب (u_n) نحو k لأننا نحصل بفضل العلاقة $v_n \leq u_n \leq w_n$ على $-\varepsilon < v_n - k \leq u_n - k \leq w_n - k < \varepsilon$ عندما يكون $n \geq n_0$.

إليك هذه النظرية الهامة التي نقدمها بدون برهان لأن إثباتها يتطلب إدخال المتتاليات المتداخلة.

نظرية (المجالات المتداخلة)

نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n المجال المغلق $I_n = [a_n, b_n]$ من $\mathbb{R}$. نفرض أن $I_{n+1} \subset I_n$ من أجل كل n. عندئذ :   1) يكون التقاطع $\bigcap_n I_n$ لكل المجالات I_n قطعة مستقيمة I (ومنه فإن التقاطع غير خال).   2) إذا كان $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ فإن المتتاليتين (a_n) و (b_n) تكونان متقاربتين نحو نفس النهاية، و $I = \{c\}$ حيث $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = c$.

ملاحظة

لو استبدلنا في النظرية السابقة المجالات المغلقة $I_n = [a_n, b_n]$ بالمجالات المفتوحة $I_n =]a_n, b_n[$ لسقطت نتيجة النظرية. مثال ذلك :

$I_n = \left]0, \frac{1}{n}\right[$. لاحظ أن $0 = \lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ورغم ذلك $\bigcap_n I_n = \phi$.

4. تطبيق :

نريد هنا تقديم عينة عن كيفية تعريف دالة مألوفة باستخدام المتتاليات دون غيرها. الدالة التي اخترناها لهذا المثال هي الدالة الأسية.

توطئة 1

> ليكن p عددا طبيعيا غير معدوم مثبتا.
> إن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ $u_n = \dfrac{1}{n^p} C_n{}^p$
> (حيث $C_n{}^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$) متقاربة ونهايتها $\dfrac{1}{p!}$.

البرهان :

لدينا

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{p!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{p-1}{n}) \\
&= \frac{1}{p!} \times \frac{(n-1)(n-2)...(n-(p-1))}{p^{p-1}} \times \frac{(n-p)...2.1}{(n-p)...2.1} \\
&= \frac{1}{p!} \times \frac{(n-1)!}{n^{p-1}} \times \frac{1}{(n-p)!} \\
&= \frac{1}{p!} \times \frac{n!}{n^p} \times \frac{1}{(n-p)!} \\
&= \frac{1}{n^p} C_n{}^p \\
&= u_n .
\end{aligned}
$$

ومن جهة أخرى،

$$\forall j = 1,\ldots, p-1: \quad 1-\frac{j}{n} \leq 1,$$

ومنه :

$$\left(1-\frac{p-1}{n}\right)^{p-1} \leq (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{p-1}{n}).$$

وبالتالي :

$$\left(1-\frac{p-1}{n}\right)^{p-1}\frac{1}{p!} \leq u_n \leq \frac{1}{p!}.$$

وعندما نجعل n يؤول إلى $+\infty$ في المتباينة السابقة (مع ترك p مثبتا) نحصل على المطلوب، وهو أن نهاية المتتالية (u_n) تساوي $\frac{1}{p!}$.

توطئة 2

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان بـــ

$$\forall n \in IN, \quad u_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$$

و

$$\forall n \in IN^*, \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

1) إن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة. ونهايتها محصورة بين 2.7 و 3.

2) إن المتتالية (v_n) متزايدة ومتقاربة ونهايتها تساوي نهاية المتتالية (u_n).

تعريف (العدد e)

نرمز للنهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) بالحرف e ، أي أننا نضع تعريفا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = e\,.$$

ملاحظة

هذه النهاية هي التي ستكون أساس اللوغريتم النبيري (ولذا اخترنا لها ذلك الرمز)، وهي التي ستمكننا من إنشاء الدالة الأسية عن طريق المتتاليات.

برهان التوطئة 2 :

1) **من الواضح أن المتتالية (u_n) متزايدة. ثم إننا نستطيع التأكد بالتراجع من أن**

$$\forall p \geq 1, \qquad \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}}.$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{p-1}} \\ &= 1 + \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^p \\ &\leq 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

إذن فالمتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى. ولذا فهي متقاربة،
ولدينا : $\lim_n u_n \leq 3$. كما أن

$$2.7 \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=u_4 \leq u_n \leq \lim_n u_n .$$

2) نستطيع، حسب دستور ثنائي الحد، كتابة

$$v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{n^p}C_n^{\ p},$$

$$v_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\sum_{p=0}^{n+1}\frac{1}{(n+1)^p}C_{n+1}^{\ p}.$$

نعلم حسب التوطئة 1 أن :

$$\forall \mathrm{p} \leq \mathrm{n}: \qquad \frac{1}{n^p}C_n^{\ p} \leq \frac{1}{(n+1)^p}C_{n+1}^{\ p}.$$

ومنه :

$$v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{n^p}C_n^{\ p},$$

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}C_{n+1}^{n+1}+\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(n+1)^p}C_{n+1}^{\ p}\\&\geq \frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{n^p}C_n^{\ p}\\&\geq v_n.\end{aligned}$$

إذن المتتالية (v_n) متزايدة.

ومن جهة أخرى أثبتنا في التوطئة 1 أن

$$\forall p \leq n, \qquad \frac{1}{n^p}C_n^{\ p} \leq \frac{1}{p!}.$$

ومن ثم :

$$v_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n^p} C_n{}^p \leq \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = u_n,$$

مع العلم أن $u_n \leq 3$ حسب ما أوضحنا سلفا. لذلك فإن المتتالية (v_n) محدودة. وبما أنها متزايدة فهي متقاربة.

لنعتبر الآن عددين طبيعيين m و n بحيث $m > n \geq 2$. لدينا :

$$\begin{aligned} v_m &= \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{m^p} C_m{}^p \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{m^p} C_m{}^p \\ &\geq 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{m^p} C_m{}^p. \end{aligned}$$

عندما نجعل m يؤول الى لانهاية نحصل، بالاستفادة من التوطئة السابقة، على

$$\lim_m v_m \geq 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} = u_n.$$

ثم نجعل n يؤول الى لانهاية في هذه المتباينة، مع العلم أن $\lim_n u_n = e$، فيأتي : $\lim_m v_m \geq e.$.

ولما كان $v_n \leq u_n$ ينتج

$$\lim_n v_n \leq \lim_n u_n = e.$$

ومنه نستخلص نتيجة التوطئة $\lim_n v_n = \lim_n u_n = e$.

نظرية (الدالة الأسية والمتتاليات)

ليكن n_0 و $\mathbb{N}^*$. **إن المتتالية** (v_n) **المعرفة بـــ**

$$\forall n\in IN^*,\qquad v_n=(1+\frac{n_0}{n})^n$$

متقاربة.

البرهان

1) **الحالة التي يكون فيها** $n_0=1$ **تمت دراستها.**

2) **نفرض أن** $2\le n_0$. **لدينا :**

$$\forall n\in IN^*,\qquad n+1\le nn_0\,.$$

ومنه يأتي بناء على التوطئة 1 :

$$1\le p\le n,\qquad {n_0}^p\frac{1}{n^p}.{C_n}^p\le {n_0}^p\frac{1}{(n+1)^p}{C_n}^p$$
$$\le {n_0}^p\frac{1}{(nn_0)^p}{C_{nn_0}}^p.$$

ومنه :

$$\forall n\ge 1,\qquad v_n=1+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n^p}C_n^p.{n_0}^p$$
$$\le 1+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(n+1)^p}C_{n+1}^p.{n_0}^p$$
$$\le 1+\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{(n+1)^p}C_{n+1}^p.{n_0}^p=v_{n+1}.$$

وبالتالي فإن المتتالية (v_n) **متزايدة.**

لنثبت أن (v_n) محدودة. لدينا :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 1+\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{(n+1)^p}C_{n+1}^p.n_0{}^p \\
&\leq 1+\sum_{p=1}^{nn_0}\frac{1}{(nn_0)^p}C_{nn_0}^p.n_0{}^p \\
&= \sum_{p=0}^{nn_0}\frac{1}{n^p}C_{nn_0}^p \\
&= (1+\frac{1}{n})^{nn_0}.
\end{aligned}$$

ولذلك نحصل (باستخدام التوطئة السابقة) على

$$\forall n \geq 1, \qquad v_n \leq v_{n+1} \leq \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{n_0} \leq 3^{n_0}.$$

إذن فالمتتالية (v_n) محدودة (من الأعلى والأسفل لأنها موجبة).
وهكذا ينتج أنها متقاربة بوصفها متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى.
لندخل الآن الدالة الأسية :

نظرية (تقارب متتالية)

ليكن x من $\mathbb{R}^+$ مثبتا. إن المتتالية $(v_n(x))$ المعرفة بـــ

$$\forall n \in IN^*, \qquad v_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$$

متقاربة.

البرهان

لاحظ أن الحالة $x=0$ لا تستحق الدراسة لوضوحها.

من أجل $x>0$، البرهان شبيه ببرهان النظرية السابقة فيما يخص الرتابة : اثبت بإتباع نفس الخطوات أن $(v_n(x))$ متزايدة. لإثبات أن $(v_n(x))$ محدودة من الأعلى نضع $n_0=[x]+1$ حيث يرمز $[x]$ للجزء الصحيح لــ x. لدينا (تذكر أن $0<x$) :

$$\forall p\in IN, \qquad x^p\le n_0^p .$$

ومن ثمّ :

$$\begin{aligned} v_n(x) &\le \sum_{p=0}^{n}\frac{n_0^p}{n^p}C_n^p \\ &\le \left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n . \end{aligned}$$

لكن المتتالية $\left((1+\frac{n_0}{n})^n\right)_n$ متزايدة. ولذلك يمكن إيجاد، من أجل كل عدد طبيعي n، عددا طبيعيا k بحيث $n\le kn_0$ و

$$\left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{n_0}{kn_0}\right)^{kn_0}=\left((1+\frac{1}{k})^k\right)^{n_0}.$$

ونحن نعلم (التوطئة 2) أن

$$\forall k\in IN^*, \qquad (1+\frac{1}{k})^k\le 3.$$

وهكذا يتبيّن أن : $v_n(x)\le 3^{n_0}$. وهو ما يثبت أن المتتالية المتزايدة $(v_n(x))$ محدودة. وبالتالي فهي متقاربة.

تعريف (الدالة الأسية)

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، نعرف الدالة الأسية كما يلي :

$$e^x = \lim_n (1+\frac{x}{n})^n .$$

ملاحظة

ينتج من هذا التعريف ومن تعريفنا للعدد e أن :

$$e^0 = 1,$$

$$e^1 = \lim_n (1+\frac{1}{n})^n = e.$$

نذكّر أنه لا يجوز لنا استخدام العلاقة $e^{x+y} = e^x e^y$ الآن لأننا لم نثبتها بعد انطلاقا من تعريفنا للدالة الأسية.

نظرية

ليكن n عددا صحيحا. لدينا : $e^n = (e^1)^n$.

البرهان

يتم بالتراجع انطلاقا من النظرية السابقة التي تعطي العلاقات:

$$e^2 = e^{1+1} = e^1 . e^1 = \left(e^1\right)^2$$

$$1 = e^0 = e^{1-1} = e^1 . e^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{-1} = \left(e^1\right)^{-1}$$

$$e^{n+1} = e^n . e^1 = \left(e^1\right)^n . e^1 = \left(e^1\right)^{n+1}$$

5. خواص أخرى للدالة الأسية :

1. نعلم أن $e^x = \lim_n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. وبالتالي $0 \le e^x$ لأن $0 \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ عندما يكون n كبيرا. وإذا ذكرنا بأن $1 = e^x.e^{-x}$ من أجل كل x و $\mathbb{R}$ أدركنا بأن $0 \ne e^x$ من أجل كل x و $\mathbb{R}$ (نرى ذلك بالخلف). وهكذا تنتج الخاصية :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0.$$

كما أن العلاقة $1 = e^x.e^{-x}$ تستلزم $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

2. الدالة الأسية متزايدة على مجموعة الأعداد الحقيقية. ذلك لأن

$$\begin{aligned} x>y &\Rightarrow x-y>0 \\ &\Rightarrow \frac{e^x}{e^y}=e^x e^{-y}=e^{x-y}>e^0=1. \end{aligned}$$

ومنه يأتي تزايد الدالة الأسية.

3. بما أن $0 \le \lim_{x\to 0}\left|e^x - 1\right| \le \lim_{x\to 0} xe^x = 0$
فإن $\lim_{x\to 0} e^x=1.$

4. لدينا من أجل كل $m\in\mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=+\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty}x^m e^x=0\,.$$

لنثبت ذلك. ليكن $m\in\mathbb{N}$ مثبتا. يمكن أن نكتب من أجل $m\le n$

$$\forall x>0,\quad \sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}\ge\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\,.$$

ومنه

$$\forall x>0,\quad \frac{1}{x^m}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}\ge\frac{x}{(m+1)!}\,.$$

بجعل n يؤول الى لانهاية في الطرفين نجد

$$\forall x>0,\quad \frac{e^x}{x^m}\ge\frac{x}{(m+1)!}\,.$$

وبجعل x يؤول إلى لانهاية في الطرفين نحصل على :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=+\infty\,.$$

ومن جهة أخرى، باعتبار $x<0$ وكتابة

$$x^m e^x=(-1)^m\frac{(-x)^m}{e^{-x}}$$

نستنتج بوضع $-x=y$ نحصل على

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)^m}{e^{-x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^m}{e^y}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\frac{e^y}{y^m}}=0$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}x^m e^x=0$.

5. باعتبار $m=0$ في النهايتين السابقتين

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=+\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty}x^m e^x=0$$

نجد

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

وبناء على ذلك وعلى المعلومات السابقة ننشئ جدول تغيرات الدالة الأسية :

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$			$+$
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

6. موضوع للدراسة :

نريد دراسة الدوال $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التي تحقق العلاقة

$$(1) \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \qquad f(x+y)=f(x)+f(y).$$

تسمى كل دالة تحقق هذه العلاقة دالة جمعية.

نلاحظ في البداية أن الدوال الخطية، أي تلك التي تكتب على الشكل $f(x)=cx$ حيث c ثابت، تحقق العلاقة الجمعية (1).

سؤال : هل توجد دوال أخرى غير الدوال الخطية تحقق العلاقة (1)؟

الجواب : نعم. وضح ذلك بالاستعانة بالنظرية التالية :

نظرية

تكون دالة $f:]a,b[\to IR$ مستمرة عند النقطة $x_0 \in]a,b[$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي : من أجل كل متتالية $(u_n) \in]a,b[$ متقاربة نحو x_0 فإن $\lim\limits_{n} f(u_n) = f(x_0)$.

7. تمارين :

تمرين 1

ما قولك في رتابة المتتاليات المعرفة بحدودها العامة كما يلي :

1) $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$ ، 2) $u_n = 5n + \dfrac{1}{n+1}$ ، 3) $u_n = \dfrac{n+5}{4n-2}$ ،

4) $u_n = -2n + n^2$ ، 5) $u_n = n(n+(-1)^n)$ ، 6) $u_n = \dfrac{\sqrt{2+2(-1)^n}}{n+1}$ ،

7) $u_n = \sin n$ (حيث يرمز $\sin$ إلى الجيب)، 8) $u_n = \sqrt[n]{2}$.

تمرين 2

أدرس طبيعة كل متتالية (u_n) المعرفة بـــ :

1. $u_n = \dfrac{2}{n-1} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

2. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$

3. $u_n = \dfrac{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2).2n}$

4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

تمرين 3

ادرس طبيعة المتتاليات التالية :

1. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+3n+1}$.

2. $u_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+(2n-1)}{1+2+\ldots+n}$.

3. $u_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+\ldots+n}$.

4. $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$.

تمرين 4

لتكن (u_n) متتالية عددية. أثبت التكافؤ :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 .$$

تمرين 5

لتكن (u_n) متتالية أعداد موجبة. أثبت أن

$$. \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_n+1} = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 .$$

تمرين 6

ليكن $a \in \mathbb{C}$. ولتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـــ $u_n = a^n$ المسماة المتتالية الهندسية ذات الأساس a.

أثبت أن المتتالية (u_n) تكون متقاربة إذا وفقط إذا كان $|a|<1$ أو $a=1$.

تمرين 7

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين تحققان الشرطين :

1. **(u_n) متقاربة نحو الصفر.**
2. **$|v_{n+p} - v_n| \le |u_n|$ من أجل كل عددين طبيعيين n و p.**

أثبت أن (v_n) متقاربة.

تمرين 8

لتكن (u_n) متتالية موجبة. نفرض أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=u$ وأن $u\in\left]-1,1\right[$.

برهن أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

تمرين 9

لتكن (u_n) متتالية عددية تحقق الشرط :

$|u_{n+2}-u_{n+1}|\leq\frac{|u_{n+1}-u_n|}{3}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أثبت أن $|u_{n+2}-u_{n+1}|\leq\frac{|u_1-u_0|}{3^{n+1}}$ من أجل كل عدد طبيعي n،

ثم استنتج أن (u_n) كوشية (وبالتالي فهي متقاربة).

تمرين 10

بيّن أن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ $u_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ متباعدة.

تمرين 11 (أساس اللوغاريتم النبيري e عدد أصم)

نذكّر أن e هو (تعريفا) النهاية المشتركة للمتتاليتين المتجاورتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـــ $u_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ و $v_n=u_n+\frac{1}{n!}$.

1. نفترض أن e ناطق وأنه يوجد (إذن) عددان طبيعيان p و q بحيث $e=\frac{p}{q}$. أثبت أن

$$q!u_q<(q-1)!.p<q!u_q+1.$$

2. استنتج أن المتباينة السابقة خاطئة. واستخلص أن e غير ناطق (أي أنه أصم).

إجابات وحلول

تمرين 1

الإجابة : 1) متناقصة ، 2) متزايدة، 3) متناقصة، 4) متزايدة، 5) متزايدة، 6) غير رتيبة، 7) غير رتيبة، 8) متناقصة.

تمرين 2

الإجابات :

1. يكفي أن تجعل n يؤول إلى $+\infty$ في كل حد فتجد أن المتتالية متقاربة نحو 0.
2. يمكن أن تكتب $\frac{1}{2}u_n$ كمجموع ثم تحسب $u_n-\frac{1}{2}u_n$ ... وستكتشف أن $u_n=2-\frac{1}{2^n}$. ومنه تستنتج تقارب المتتالية نحو 2.

3. اعتبر نسبة حدين متواليين من المتتالية وستجد أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$. وهكذا تلاحظ أن المتتالية متناقصة وهي محدودة من الأدنى بـــ 0. إذن فهي متقاربة.

4. لاحظ أن عبارة المتتالية تؤدي إلى عدم تعيين عند المرور إلى النهاية. ولذا اضرب في "المرافق" وستجد أن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
وهذا يؤدي إلى تقارب المتتالية إلى 0.

تمرين 3

الإجابة :

1. متقاربة نحو 2.

2. لدينا :

$$u_n = \frac{\frac{2n(2n-1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n(2n-1)}{n(n+1)} = \frac{4n-2}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 4 .$$

3. لدينا :

$$u_n = \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+...+n} = \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 2 .$$

4. المجموع المعطى هو أكبر من جداء n في أصغر الحدود، وهو كذلك أصغر من جداء n في أكبر الحدود. وعليه :

$$n \times \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n} \le n \times \frac{n}{n^2+1} .$$

إذن :

$$1 \xleftarrow{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \le u_n \le \frac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$$

وبالتالي فنظرية الحصر تعطي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

تمرين 4

يكفي كتابة تعريف التقارب. إن تقارب (u_n) نحو 0 يعني تعريفا :

$$(1)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \ge n_0 \ \Rightarrow\ |u_n - 0| < \varepsilon .$$

إن تقارب $(|u_n|)$ نحو 0 يعني تعريفا :

$$(2)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \ge n_0 \ \Rightarrow\ \big||u_n| - 0\big| < \varepsilon .$$

لاحظ أنه لا فرق بين العلاقتين (1) و (2) سوى في الظاهر.

ملاحظة :

1) يمكن الإجابة عن السؤال بالاستفادة من استمرار الدوال (دالة القيمة المطلقة).

2) ما رأيك في الاستلزام التالي عموما (لا تتسرع) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |u|\,?$$

تمرين 5

لاحظ في البداية أن الاستلزام "$\Leftarrow$" بديهي.

لنهتم بالاستلزام "$\Leftarrow$" : بعد حسابات أولية في المسودة، نلاحظ أنه عندما يكون ε موجبا صغيرا فالأمر كذلك أيضا فيما يخص العدد $\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$. وعليه نقترح ما يلي : نعبّر عن أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{u_n+1}=0$ فيكون :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\ \Rightarrow\ 0<\frac{u_n}{u_n+1}<\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$$

أي :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\ \Rightarrow\ 0<u_n<\varepsilon.$$

وهذا يعني تقارب (u_n) نحو 0.

تمرين 8

نعبّر عن أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=u$ فنستنتج :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\ \Rightarrow\ 0<\frac{u_{n+1}}{u_n}<u+\varepsilon.$$

لنختر في العلاقة السابقة مثلا $\varepsilon=\frac{1-u}{2}$ فنلاحظ أن $\varepsilon>0$ وأن $u+\varepsilon=\frac{1+u}{2}<1$ إذ أن $u\in\left]-1,1\right[$. لنضع $u+\varepsilon=\frac{1+u}{2}=k$ مع العلم أن ذلك يؤدي إلى $0<k<1$. وبعد ذلك نستفيد من كل ما سبق لكتابة :

$$0<\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\times\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}\times\ldots\times\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{u_n}{u_{n_0}}<k^{\,n-n_0}.$$

وهكذا يتضح أنه يوجد ثابت C $\left(C=u_{n_0}k^{-n_0}\right)$ بحيث

$$n\geq n_0\ \Rightarrow\ 0<u_n<C.k^n.$$

نحن نعلم أن $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$ لأن $0<k<1$. ولذلك فالمرور إلى النهاية في أطرف $0<u_n<C.k^n$ يؤدي حتما إلى $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

تمرين 10

نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم n :

$$\begin{aligned} u_{2n}-u_n &= (1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n} \\ &\geq n\times\frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ومن ثم : $u_{2n}-u_n \geq \frac{1}{2}$. لنتذكر شرط كوشي ولنتساءل ما إذا كانت المتتالية المعطاة متتالية كوشية. لاحظ أننا لو نختار $\varepsilon=\frac{1}{4}$ في ذلك الشرط و $q=2p$ لوجدنا من أجل كل n_0 بحيث $p\geq n_0$ و $q\geq n_0$: $u_{2p}-u_p>\frac{1}{4}$. وهذا يعني أن شرط كوشي غير محقق وبالتالي فالمتتالية المعطاة متباعدة.

ملاحظة :

هناك أسلوب آخر لإثبات المطلوب دون المرور بالمتتاليات الكوشية. فبعد ملاحظة قيام العلاقة $u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$ من أجل كل n. نستدل بالخلف ونفترض أن (u_n) متقاربة، فستنتج أن (u_{2n})

متقاربة أيضا نحو نفس النهاية لأن (u_{2n}) جزئية من (u_n).
وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} - u_n = 0$. ومنه يظهر تناقض بين العلاقة الأخيرة و $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ لأنهما يؤديان إلى $\frac{1}{2} \leq 0$. إذن (u_n) متباعدة.

تمرين 11

1. يتضح من التذكير ومن الفرض أن $u_n < \frac{p}{q} < v_n$ وذلك من أجل كل n. منه $u_q < \frac{p}{q} < v_q$. عندما نضرب أطراف هذه المتباينة في $q!$ نجد $q!u_q < (q-1)!p < q!.(u_q + \frac{1}{q!})$، أي $q!u_q < (q-1)!p < q!u_q + 1$.

2. لدينا

$$\begin{aligned} q!u_q &= q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} \\ &= q! + q! + q(q-1)\ldots3 + \ldots q(q-1) + q + 1 \end{aligned}$$

يتبين من الطرف الأخير في العلاقة السابقة أن كل حد من ذلك الطرف ينتمي إلى $\mathbb{N}$. ومنه $q!u_q \in \mathbb{N}$، وعليه $q!u_q + 1 \in \mathbb{N}$ مع العلم أن $q!u_q$ و $q!u_q + 1$ عددان طبيعيان متواليان. ومن ثم يأتي، استنادا إلى المتباينة $q!u_q < (q-1)!.p < q!u_q + 1$، أن $(q-1)!.p$ ليس عددا طبيعيا. وهذا تناقض لأن $(q-1)!.p$ عدد طبيعي إذ أن p و q عددان طبيعيان. هذا التناقض يثبت المطلوب، وهو أن e غير ناطق (أي أنه أصم).

الفصل الثاني

الإستمرار والإشتقاق

(مراجعة)

1- مقدمة

2- عموميات على الدوال

3- النهايات

4- الإستمرار

5- الإشتقاق

6- تمارين

1. مقدمة :

نذكر في هذا الدرس بمفهوم النهايـــة والاســـتمرار والاشـــتقاق باعتبار أن القارئ سبق له أن اطلع على هذا الموضوع في دروس التحليل الرياضي. وفي هذا السياق فلا بد لنا من مراجعة جملة مـــن التعـــاريف، وتقديم بعض النظريات والنتائج المتعلقة بالاستمرار والاشتقاق. وقبل كل ذلك فقد قدمنا تعاريف ونتائج عامة في موضوع الدوال.

والواقع أن البرنامج الرسمي لتكوين المفتشين لا يتطرق إلى هـــذه المواضيع بل يتناول مباشرة (بعد المتتاليات) موضوع الحساب التكاملي. غير أن التحليل الرياضي يبيّن أنه لا حيلـــة في إدراك مفهـــوم التكامـــل والحسابات المتعلقة به ما لم نستوعب المفاهيم السالفة الـــذكر. وعليـــه أدرجناها هنا (ببعض الإيجاز) مرفقة بأبرز النتائج والخواص المرتبطة بها.

2. عموميات على الدوال :

نقدم في هذا المقطع بعض التعاريف المرتبطة بمفهوم الدالة (أو التابع) بشكل موجز.

تعريف (جمع وضرب الدوال)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$. ولتكن $f : A \to \mathbb{R}$ و $g : A \to \mathbb{R}$ دالتين. نعرّف **مجموع** $f + g : A \to \mathbb{R}$ **وجداء الدالتين** $f.g : A \to \mathbb{R}$ **وجداء دالة في عدد** λ $\lambda.f : A \to \mathbb{R}$ **و نسبة الدالتين** $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ (في حالة عدم انعدام g) بالعلاقات :

$$\forall x \in A, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$\forall x \in A, \quad (f.g)(x) = f(x).g(x),$$
$$\forall x \in A, \quad (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x),$$
$$\forall x \in A, \quad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

ملاحظة

مجموعة الدوال المزودة بقانوني جمع الدوال وضربها في الأعداد (الحقيقية أو العقدية) يجعل منها فضاء شعاعيا على $\mathbb{R}$. أما قانونا الجمع وضرب الدوال فيما بينها فيزود مجموعة الدوال ببنية حلقة تبديلية واحدية.

تعريف (تركيب الدوال)

ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ و $f:A\to B$ و $g:B\to\mathbb{R}$ دالتين.

نعرّف دالة التركيب $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ بالعلاقة :

$$\forall x\in A,\quad (g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right).$$

تعريف (التطبيق المطابق)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$. يسمى التطبيق $f:A\to A$ المعرف بـ

$$\forall x\in A,\ f(x)=x.$$

التطبيق المطابق على A. نرمز للتطبيق المطابق على A عموما بـ I_A.

تعريف (التطبيق العكسي)

ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ و $f:A\to B$. إذا كان $f:A\to B$ تقابلا يمكن تعريف الدالة العكسية $f^{-1}:B\to A$ بـ $f^{-1}(y)=x$ عندما يكون $y=f(x)$.

تعريف (الدالة المحدودة)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ و $f: A \to \mathbb{R}$. نقول عن الدالة f إنها محدودة إذا وجد ثابت $0 < M$ بحيث

$$\forall x \in A, \quad |f(x)| \leq M .$$

عندما تكون f محدودة فإن المجموعة $f(A)$ المحتواة في $\mathbb{R}$ محدودة. وهي إذن تقبل حدا أدنى وحدا أعلى، نرمز لهما على التوالي بـــ $\inf f$ و $\sup f$.

ملاحظة

يتّضح من الخاصيتين المميزتين للحدين الأدنى والأعلى أن (باعتبار $f: A \to \mathbb{R}$) :

$$m = \inf_{x \in A} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \;\; m \leq f(x), \\ \forall \varepsilon > 0, \; \exists a \in A \; : \; f(a) < m + \varepsilon. \end{cases}$$

$$M = \sup_{x \in A} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \;\; f(x) \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \; \exists b \in A \; : \; M - \varepsilon < f(b). \end{cases}$$

لاحظ أن m و M لا ينتميان بالضرورة إلى $f(A)$.

مثال

نعتبر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \sin x$ فنجد أن :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sin(x) = 1 \in f(\mathbb{R}) = [0,1].$$

نعتبر $f: \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \sin x$ فنجد أن :

$$\inf_{x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[} \sin(x) = 0 \notin f(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[) =]0,1[,$$

$$\sup_{x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[} \sin(x) = 1 \notin f(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[) =]0,1[.$$

تعريف (الدالة الزوجية والدالة الفردية)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ متناظرا بالنسبة لـ 0 و $f : A \to \mathbb{R}$. - نقول عن الدالة f إنها زوجية إذا كان $\forall x \in A, \quad f(x) = f(-x)$. - نقول عن الدالة f إنها زوجية إذا كان $\forall x \in A, \quad f(x) = -f(-x)$.

أمثلة

* الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \cos x$ و $g(x) = |x|$ دالتان زوجيتان.

* الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x^3$ دالتان فرديتان.

* الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ
$f(x) = \sin x + \cos x$ و $g(x) = |x| + x$ دالتان غير زوجيتين وغير فرديتين.

نظرية

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ متناظرا بالنسبة لـ 0 و $f : A \to \mathbb{R}$. تكتب f على شكل مجموع دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية.

البرهان

نعرّف g و h بــ $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ و $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. **لاحظ أن** :

1) g زوجية، 2) h فردية، 3) $f=g+h$.

تعريف (الدالة الدورية)

ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

- نقول عن الدالة f إنها دورية إذا وجد عدد حقيقي φ غير منعدم يحقق العلاقة

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(x+\varphi).$$

- يسمى φ دورة لــ f. غالبا ما نسمي دورة f أصغر عدد (إن وجد) موجب تماما φ يحقق العلاقة السابقة

أمثلة

- **الدالة** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **المعرفة بــ** $f(x)=\cos x$ **دورية ودورها** 2π.
- **الدالة** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **المعرفة بــ** $f(x)=\cos 2x$ **دورية ودورها** π.
- **الدالة** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **المعرفة بــ** $f(x)=\cos 2\pi x$ **دورية ودورها** 1.
- **الدالة** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **المعرفة بــ** $f(x)=\cos\dfrac{2\pi}{a}x$ ، **حيث** a **عدد حقيقي موجب تماما، دورية ودورها** a.

ملاحظة :

من الجائز أن يستغرب القارئ في عبارة "إن وجد" الواردة في التعريف السابق لأنه ألف الدوال الدورية من نمط الدوال المثلثية.
لتوضيح أن هناك دوال دورية ليس لها أصغر دورة نسوق المثال التالي :

$$f(x)=\begin{cases}1 & : x\in\mathbb{Q},\\ 0 & : x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

خذْ $\varphi=\frac{1}{n}$ **حيث** n **عدد طبيعي غير منعدم وستلاحظ أن :**

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(x+\frac{1}{n}).$$

يرجع ذلك إلى قيام الخاصية التالية :

$$\begin{aligned}x\in\mathbb{Q}&\Rightarrow x+\frac{1}{n}\in\mathbb{Q}\\ &\Rightarrow\ f(x)=f(x+\frac{1}{n})=1,\\ x\notin\mathbb{Q}&\Rightarrow x+\frac{1}{n}\notin\mathbb{Q}\\ &\Rightarrow\ f(x)=f(x+\frac{1}{n})=0.\end{aligned}$$

ومن ثمّ نلاحظ أن كل عدد من الشكل $\frac{1}{n}$ **(حيث** n **عدد طبيعي) هو دورة للدالة. ما هي أصغر دورة؟ لاحظ أن** $\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}=0$ **، وهو يبرر وجود عبارة "إن وجد" الواردة في التعريف السابق.**

تعريف (التابع المحدود)

- **نقول عن التابع f إنه محدود من الأعلى على D إذا وجد عدد حقيقي M يحقق :**

$$\forall x \in D, \quad f(x) \leq M.$$

- **نقول عن التابع f إنه محدود من الأدنى على D إذا وجد عدد حقيقي m يحقق :**

$$\forall x \in D, \quad m \leq f(x).$$

- **إذا كان f محدودا من الأعلى و محدودا من الأدنى، نقول إنه محدود على D.**

مثال : التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ غير محدود على $\mathbb{R}^*$ لا من الأعلى و لا من الأدنى.

تعريف (دالة رتيبة)

لتكن دالة $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

*** نقول إن f متزايدة تماما إذا كان $f(x) < f(y)$ كلما كان $x < y$.**

*** نقول إن f متناقصة تماما إذا كان $f(x) < f(y)$ كلما كان $x > y$.**

*** نقول عن f إنها رتيبة إن كانت متزايدة أو متناقصة.**

إذا استبدلنا فيما سبق > و < على التوالي بـــ ≤ و ≥ فإنه ينبغي حذف لفظ "تماما".

مثال

- الدالة $f:\mathbb{R}^{+}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $f(x)=x^2$ متزايدة تماما.
- الدالة $g:\mathbb{R}^{-}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $g(x)=x^2$ متناقصة تماما.
- الدالة $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $h(x)=x^2$ ليست رتيبة.

نظرية

لتكن دالة $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ متزايدة تماما (متناقصة تماما، على الترتيب) حيث I مجال. عندئذ :

1) يكون $f:I\longrightarrow f(I)$ تقابلا.

2) يكون $f^{-1}:f(I)\longrightarrow I$ متزايدة تماما (متناقصة تماما، على الترتيب).

البرهان

متروك كتمرين للقارئ.

تعريف (الاقتصار والتمديد)

ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ بحيث $B\subset A$ و $f:A\to\mathbb{R}$ و $g:B\to\mathbb{R}$.

نقول عن الدالة f إنها امتداد (أو تمديد) للدالة g إذا كان :

$$\forall x\in B,\ \ f(x)=g(x).$$

وفي هذه الحالة تسمى الدالة g اقتصارا للدالة f. نعبّر عن ذلك عموما بالرمز $g=f_{|B}$.

3. النهايات:

نقدم في هذا المقطع تعاريف أساسية وبعض القضايا الخاصة بالنهايات دون الغوص كثيرا في الموضوع.

تعريف (النهاية)

لتكن $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. نقول عن f إنها تملك نهاية منتهية c عند النقطة a إذا تحقق الشرط : $\lim_{x \to a} f(x) = c$، أي إذا كان $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: \ \lvert x-a \rvert < \alpha \Rightarrow \lvert f(x)-c \rvert < \varepsilon$.

ملاحظة

من حق α، في التعريف السابق، أن يتعلق بـــ ε و a. وكما ذكرنا في حالة المتتاليات المتقاربة فإن إثبات أن $\lim_{x \to a} f(x) = c$ باستخدام التعريف يتمثل في تحديد α بدلالة ε و a.

مثال

لإثبات أن $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ باستخدام التعريف نلاحظ بعد اختيار ε كيفيا أنه يكفي أن نكتب

$$\begin{aligned}|x^2-9| &\le |x+3||x-3|\\ &< \alpha|x+3|\\ &< 7\alpha\\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

وذلك باعتبار أن x مجاورا لــ 3، وبالتالي فهو لن يكون مثلا أكبر من 4. وهكذا يتضح أنه يكفي اختيار $\alpha < \frac{\varepsilon}{7}$ للحصول على صحة

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: \ |x-3| < \alpha \Rightarrow |x^2-9| < \varepsilon .$$

إن التعريف الموالي يكافئ السابق.

تعريف (النهاية "طبولوجيا")

لتكن $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. نقول عن f إنها تملك نهاية منتهية c عند النقطة a إذا تحقق الشرط :   **من أجل كل مجال C مركزه c يوجد مجال A مركزه a بحيث** $f(A \cap I) \subset C$.

نظرية (النهاية بالمتتاليات)

لتكن $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **دالة معرفة على مجال مفتوح** I **تنتمي إليه نقطة** a**. تكون للدالة** f **نهاية منتهية** c **عند النقطة** a **إذا وفقط إذا كان : مهما كانت المتتالية** (x_n) **من** I **المتقاربة نحو** a **فإن** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = c$.

البرهان

أولا : نفرض أن للدالة f **نهاية منتهية** c **عند النقطة** a**. ولتكن متتالية** (x_n) **من** I **متقاربة نحو** a **، أي أن :**

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : \ \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0 \ \Rightarrow \ |x_n - a| < \varepsilon .$$

نكتب الآن أن للدالة f **نهاية منتهية** c **عند النقطة** a **:**

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \ |x - a| < \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - c| < \varepsilon .$$

نعتبر بعد ذلك $\varepsilon > 0$**. نختار** $\alpha > 0$ **تحقق** (2) **ونختار العدد** ε **في** (1) **بحيث:** $\varepsilon = \alpha$**. ومن ثم يأتي وجود** n_0 **بحيث تتحقق** (1)**، أي**

$$(3) \quad \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0 \ \Rightarrow \ |x_n - a| < \alpha .$$

بالرجوع إلى (2) **وبالاستناد إلى** (3) **يتضح أن**

$$\begin{aligned} \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0 \ &\Rightarrow \ |x_n - a| < \alpha \\ &\Rightarrow \ |f(x_n) - c| < \varepsilon. \end{aligned}$$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = c$.

ثانيا : : نفرض أنه مهما كانت المتتالية (x_n) **من** I **المتقاربة نحو** a **فإن** $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=c$ **، وأن** $\lim_{x\to a} f(x)\neq c$. **نعبّر عن العلاقة الأخيرة بـــ**

$$\exists\varepsilon_0>0,\ \forall\alpha>0,\ \exists x\in I : |x-a|<\alpha\ \wedge\ |f(x)-c|\geq\varepsilon_0 .$$

لنختر $\alpha=\dfrac{1}{n}$ **حيث** n **عدد طبيعي غير منعدم. يوجد عنصر** x_n **من** I **يحقق**

$$|x_n-a|<\frac{1}{n}\ \wedge\ |f(x_n)-c|\geq\varepsilon_0 .$$

وبذلك ننشئ متتالية (x_n) **تتقارب نحو** a **(بفضل العلاقة** $|x_n-a|<\dfrac{1}{n}$**) لكنها لا تحقق العلاقة** $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=c$ **(بسبب** $|f(x_n)-c|\geq\varepsilon_0$**). هذا التناقض يؤدي إلى أن فرضنا** $\lim_{x\to a} f(x)\neq c$ **خاطئ. ولذا** $\lim_{x\to a} f(x)=c$. **وهو المطلوب.**

نظرية (وحدانية النهاية)

لتكن $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ **دالة معرفة على مجال مفتوح** I **تنتمي إليه نقطة** a. **إذا قبلت الدالة** f **نهاية فهي وحيدة.**

البرهان

افرض أن f الدالة تقبل نهايتين $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c'$. ولتكن (x_n) متتالية متقاربة نحو a. يتضح من النظرية السابقة أن $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=c$ (بفضل $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$) وأن $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=c'$ (بفضل $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c'$). واعتمادا على وحدانية نهاية المتتالية $(f(x_n))_n$ تأتي المساواة $c=c'$.

ملاحظة

نتحدث عن النهاية من اليمين إذا استبدلنا في ما سبق الكتابة $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ بالكتابة $\lim\limits_{x\xrightarrow{x>a}a} f(x)$ (أي أن x يقترب من a من جهة اليمين على المحور الحقيقي)، ونتحدث عن النهاية من اليسار إذا استبدلنا الكتابة $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ بالكتابة $\lim\limits_{x\xrightarrow{x<a}a} f(x)$ (أي أن x يقترب من a من جهة اليسار على المحور الحقيقي).

تعريف (النهاية اللامنتهية)

لتكن $f: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. نقول عن f إنها تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a (ونكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$) إذا تحقق الشرط :

$$\forall A>0,\ \exists\alpha>0:\ |x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)>A.$$

ونقول عن f إنها تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a (ونكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$) إذا تحقق الشرط :

$$\forall A>0,\ \exists\alpha>0:\ |x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)<-A.$$

ملاحظة

أ) من الخواص الشهيرة للنهايات نذكر :

1. نهاية مجموع دالتين $f+g$: من السهل التأكد من صحة نتائج الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$ بدلالة قيم النهايتين $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) =_{\downarrow}$	c	$+\infty$	$-\infty$
c'	$c+c'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

2. نهاية جداء دالتين $f\times g$: من السهل التأكد من صحة نتائج الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$ بدلالة قيم النهايتين $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) =_{\downarrow}$	$c>0$	$c<0$	$c=0$	$+\infty$	$-\infty$
$c'>0$	$c\times c'$	$c\times c'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$c'<0$	$c\times c'$	$c\times c'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$c'=0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

3 . نهاية جداء دالة وعدد $\lambda.f$: من السهل التأكد من صحة نتائج الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim\limits_{x\to a}\lambda.f(x)$ بدلالة قيم النهاية $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ والعدد λ :

$\lim\limits_{x\to a}f(x)= \ \rightarrow$ / $\lambda=_{\downarrow}$	c	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda>0$	$\lambda\times c$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda<0$	$\lambda\times c$	$-\infty$	$+\infty$

4 . نهاية مقلوب دالة $\frac{1}{f}$: من السهل التأكد من صحة نتائج الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}$ بدلالة قيم النهاية $\lim\limits_{x\to a}f(x)$:

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	$c\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{c}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

5. حالات عدم تعيين : هناك حالات لا نتمكّن فيها من تحديد النهاية بالتعويض المباشر ... ولا بد من تحريات إضافية لمعرفة تلك النهاية. إليك حالات من هذا القبيل:

*** الحالة** $0\times\infty$

مثال 1: حساب $\lim_{x\to 0}\left(x^3\times\frac{1}{|x|}\right)$.

عندما نكتب $\lim_{x\to 0}x^3\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=0\times(+\infty)$ **فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب** $\lim_{x\to 0}\left(x^3\times\frac{1}{|x|}\right)$ **كما يلي** : $\lim_{x\to 0}\left(x^3\times\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0}x|x|=0$.

مثال 2 : حساب $\lim_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{3x^2}\right)$.

عندما نكتب $\lim_{x\to 0}x^2\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2}=0\times(+\infty)$ **فإننا لا نستطيع البت، ورغم ذلك نستطيع كتابة** $\lim_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{3x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين السابقين، ولذا فالحالة $0\times\infty$ **هي حالة عدم تعيين.**

* الحالة $\frac{\infty}{\infty}$

مثال 1: حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}$.

عندما نكتب $\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2}{\lim\limits_{x\to+\infty} x^3}=\frac{+\infty}{+\infty}$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}$ كما يلي :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

مثال 2 : حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}$.

عندما نكتب $\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+1}{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2}=\frac{+\infty}{+\infty}$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}$ كما يلي :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)=3+0=3 .$$

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين السابقين، ولذا فالحالة $\frac{\infty}{\infty}$ هي حالة عدم تعيين.

* الحالة $\frac{0}{0}$

مثال 1 : حساب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}$.

عندما نكتب $\frac{\lim\limits_{x\to 0}4x^2}{\lim\limits_{x\to 0}x^2}=\frac{0}{0}$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}$ كما يلي : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}4=4$.

مثال 2 : حساب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{5x^2}$.

عندما نكتب $\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^2}{\lim\limits_{x\to 0}5x^2}=\frac{0}{0}$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{5x^2}$ كما يلي :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{5x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$.

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين السابقين، ولذا فالحالة $\frac{0}{0}$ هي حالة عدم تعيين.

* حالة $\infty-\infty$

مثال 1 : حساب $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-2x^2\right)$.

عندما نكتب $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2-\lim\limits_{x\to +\infty}2x^2=+\infty-(+\infty)$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-2x^2\right)$ كما يلي : $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-2x^2\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^2)=-\infty$.

مثال 2 : **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x^2\right)$.

عندما نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty-(+\infty)$ **فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x^2\right)$ **كما يلي** : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$.

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين السابقين، ولذا فالحالة $\infty-\infty$ **هي حالة عدم تعيين.**

ب) ومن النهايات الشهيرة نذكر بوجه خاص :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

مثال

حساب $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. **لدينا** :

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e.$$

4. الاستمرار :

ما معنى استمرار (أو اتصال) دالة ؟ نستطيع أن نقرّب فكرة الاستمرار بالقول إننا نتحدث في اللغة العامة عن استمرار وضعية إذا تواصلت دون حدوث انقطعات مفاجئة في مسيرها. وبنفس المنظور نقول عن دالة "$y = f(x)$" إنها مستمرة إن كان أي تغيّر "طفيف" يطرأ على المتغير x يواكبه سلوك مماثل – أي تغير طفيف– لــ y. كيف نعبّر بالدقة الرياضية اللازمة عن هذا المفهوم؟

تعريف (الاستمرار)

> لتكن $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. نقول عن f إنـها مستمرة عند a إذا تحقق الشرطان :
>
> 1. النهاية $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجودة (في $\mathbb{R}$).
> 2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ملاحظة

1) إذا استبدلنا في التعريف السابق العلاقة $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ بالعلاقة $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = f(a)$ نقول إن f مستمر من اليمين عند a. وإذا استبدلنا تلك العلاقة بالعلاقة $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = f(a)$ نقول إن f مستمر من اليسار عند a.

2) نعبّر عن هذا التعريف رمزيا (يسميه البعض التعريف بـــ $\varepsilon-\delta$ أو $\varepsilon-\alpha$) بطريقة كوشي (1789–1857)–شفارتز (1843–1921) Cauchy-Schwarz بـــ :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : |x-a| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon \ .$$

ونعرّف الاستمرار على المجال I إن كانت الدالة مستمرة عند كل نقطة من I. ونعرّف الاستمرار من جهة واحدة (من اليمين أو من اليسار) بتقييد مآل x نحو a بالقيد $x > a$ أو $x < a$. وبطبيعة الحال فإن الاستمرار عند نقطة يعني أن هناك استمرارا من جهتي تلك النقطة.

كيف نفسّر العلاقة $\varepsilon-\alpha$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : |x-a| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

التي تعبر عن استمرار f عند a؟

نلاحظ أولا أن $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ تعني بأن $f(x)$ تنتمي إلى مجال مركزه $f(a)$، وهو $]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$. كما أن $|x-a| < \alpha$ تعني أن x ينتمي إلى مجال مركزه a، وهو $]a-\alpha, a+\alpha[$. وبالتالي فالعلاقة المعبِّرة عن الاستمرار تقول:

مهما كان
المجال الذي مركزه $f(a)$
فإنه يوجد
مجال مركزه a صورته محتواة في المجال الذي مركزه $f(a)$.

وهذا يعني :

الصورة العكسية لأي مجال مركزه $f(a)$ تحتوي مجالا مركزه a.

وما دمنا نعرف جوار نقطة على أنه مجموعة تحتوي مجالا مركزه تلك النقطة فإننا نستطيع القول بأن :

استمرار f عند a يعني الصورة العكسية لكل جوار لـ $f(a)$ هو جوار لـ a.

ملاحظة

من المهم أن يكون المجال I مفتوحا في التعريف السابق. وإن لم يكن الأمر كذلك فلا بد أن نضيف في التعريف شرطا يقول إن النقطة a تنتمي إلى مجال مفتوح محتوى في I. وبدون ذلك فإن الكتابة $x \longrightarrow a$ الظاهرة تحت الرمز lim في الشرطين الواردين في التعريف قد تؤدي إلى تناقض. ويتمثل هذا التناقض في عدم ضمان مكوث قيم x في مجموعة تعريف f عندما يقترب x من a. وكيف يجوز لنا في هذه الحالة كتابة $f(x)$!!؟

وعلى الرغم من الطابع المنطقي والحدسي لمفهوم النهاية والاستمرار فإن التجربة تثبت بأنه مفهوم صعب الإدراك بالنسبة للتلميذ والطالب كما أن التجربة التي عرفتها الرياضيات قبل عهد كوشي-

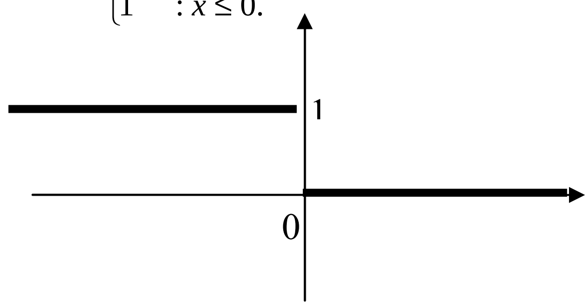
شفارتز تؤكد ذلك إذ ظل الرياضيون عدة قرون ينظّرون قبل أن يهتدوا إلى ما وصلنا إليه الآن بخصوص هذا المفهوم.

لعل البعض يعتبر أن كل الدوال مستمرة (مثل دوال كثيرات الحدود ودالة الجيب وجيب التمام المثلثيتين والدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية، ...) وإن وجدنا بعضا منها غير مستمرة فعدم استمرارها لا يحدث إلا في نقاط معدودات أو في مجموعة قابلة للعد. إليك بعض الأمثلة في هذا السياق :

مثال 1

الدالة المعرفة بــ

$$f(x)=\begin{cases}0 & : x>0\\ 1 & : x\le 0.\end{cases}$$



بيان الدالة f

مستمرة في كل مكان ما عدا في النقطة 0.

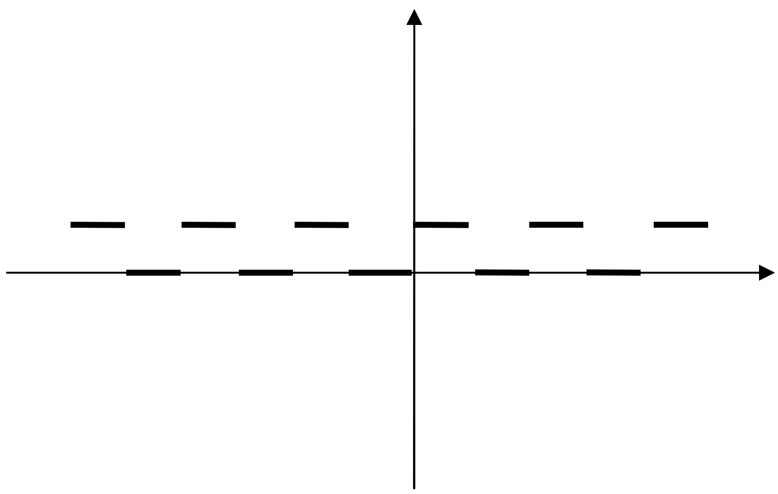
مثال 2

تصور الآن أننا نعيد النظر في المثال السابق ونكرر ما حدث في 0 عند كل قيمة لـــ x تساوي عددا صحيحا، أي أننا نعتبر الدالة المعرفة مثلا كما يلي (حيث يشير n لعنصر كيفي من مجموعة الأعداد الصحيحة):

$g(x)=1$ **من أجل** $x\in[2n,2n+1[$

$g(x)=0$ **من أجل** $x\in[2n+1,2n+2[$

إنها دالة غير مستمرة عند عدد غير منته من النقاط. مجموعة هذه النقاط هي مجموعة الأعداد الصحيحة.



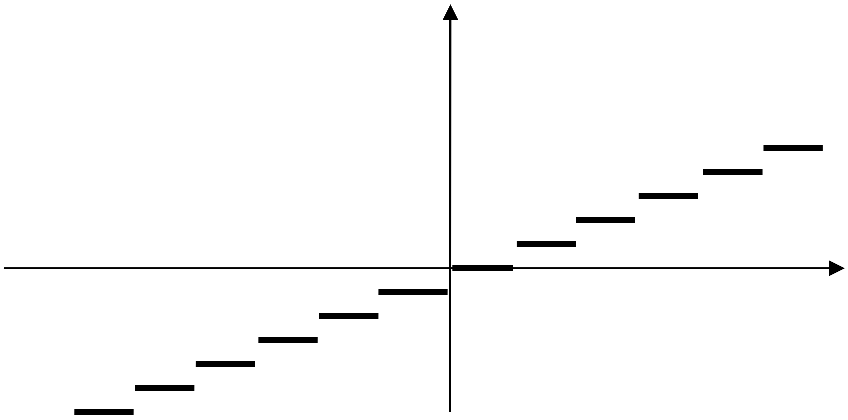
بيان الدالة g

مثال 3

يمكن أيضا التفكير في الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كالتالي حيث يشير $[x]$ إلى الجزء الصحيح لـــ x :

$$u(x) = [x]$$

إن الدالة u مستمرة ما عدا عند قيم مجموعة الأعداد الصحيحة.



بيان الدالة u

مثال 4

نطرح السؤال التالي : هل توجد دالة ليست مستمرة في أية نقطة على $\mathbb{R}$؟ هذا السؤال ليس وليد اليوم ولذا بحث فيه أسلافنا واهتدوا إلى إنشاء دالة من هذا القبيل. خذ مثلا الدالة التالية حيث يرمز $\mathbb{Q}$ لمجموعة الأعداد الناطقة :

$$v(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & : \ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

لاحظ أنها دالة لا يمكن رسم بيانها وهي غير مستمرة في أية نقطة من $\mathbb{R}$.

دعنا ننهي هذا المقطع بتقديم النظرية التالية تاركين برهانها للقارئ.

نظرية (استمرار تركيب الدوال)

ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ و $f:A\to B$ و $g:B\to\mathbb{R}$ دالتين و a نقطة من A.

نفرض قيام الشرطين :

1) f مستمر عند a،

2) g مستمر عند $f(a)$.

عندئذ تكون الدالة $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ مستمرة عند a.

نظرية (الاستمرار على متراص)

كل دالة f مستمرة على متراص $[a,b]$ دالة محدودة وتدرك حديها الأعلى والأدنى.

البرهان

1) نفرض أن f غير محدودة من الأعلى ومستمرة على $[a,b]$. لاحظ أنها مستمرة بانتظام حسب النظرية السابقة. من أجل كل عدد طبيعي n يوجد عنصر x_n من $[a,b]$ بحيث $|f(x_n)|>n$. ولما كانت المتتالية x_n محدودة (بحكم انتمائها إلى مجال محدود) فإننا نستطيع أن نستخرج منها متتالية جزئية x_{n_k} متقاربة ونهايتها x تنتمي إلى $[a,b]$ لأن $a\le x_{n_k}\le b$. ومن ثم نحصل على تناقض يتمثّل في : من جهة لدينا $\lim\limits_{n_k\longrightarrow+\infty} f(x_{n_k})=f(x)<+\infty$.

ومن جهة أخرى تؤدي العلاقة $\left|f(x_{n_k})\right| > n_k$ إلى

$$\lim_{n_k \longrightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = +\infty .$$

وبالتالي فالدالة f محدودة من الأعلى.

* البرهان على أن f محدودة من الأدنى شبيه بالبرهان على المحدودية من الأعلى. قدّم تفاصيل البرهان على المحدودية من الأدنى.

نواصل البرهان بالتأكد الآن من أن الدالة f المستمرة على $[a,b]$ تدرك حدها الأعلى، أي أنه توجد نقطة ξ من $[a,b]$ بحيث $f(\xi) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

نقدم برهانا بالخلف : نعلم مما سبق أن $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ موجود في $\mathbb{R}$. لنضع $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = s$ ولنفرض أن

$$\forall x \in [a,b]: \quad f(x) < s .$$

نلاحظ أن الدالة u المعرفة على $[a,b]$ بـــ

$$u(x) = \frac{1}{s - f(x)}$$

دالة مستمرة على $[a,b]$. ومن ثمّ فهي مستمرة بانتظام ومحدودة على $[a,b]$. نضع $\sup_{x\in[a,b]} u(x) = t$. من المؤكد أن

$$\forall x \in [a,b]: \quad u(x) = \frac{1}{s - f(x)} > 0 .$$

وعليه $t > 0$ و

$$\forall x \in [a,b]: \quad 0 < u(x) \le t .$$

ومنه ينتج

$$\forall x \in [a,b]: \quad f(\mathrm{x}) \le s - \frac{1}{t} < s \,.$$

وهذا يتنافى مع القول إن $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = s$. هذا التناقض ناجم من افتراضنا $\forall x \in [a,b]: \quad f(x) < s$

الذي يعني أنه لا وجود لنقطة ξ من $[a,b]$ بحيث $f(\xi) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

إذن فإن f يدرك حده الأعلى.

* قدّم تفاصيل إدراك f لحده الأدنى.

ملاحظة

لاحظ أن محدودية المجال مهمة في هذه النظرية. للتأكد من ذلك خذ مثلا إحدى الدالتين : دالة الظل على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ أو الدالة g المعرفة على $]0,1]$ بـــ $g(x) = \frac{1}{x}$.

لاحظ أيضا أن غلق المجال مهم في النظرية السابقة. للتأكد من ذلك اعتبر كمثال الدالة g أو الدالة h المعرفة على المجال $[1,2004[$ بـــ $h(x) = x$ فهي لا تدرك حدها الأعلى في المجال المعتبر.

من النظريات المهمة أيضا في موضوع الدوال المستمرة النتيجة التالية نظرية القيم الوسطى التي برهن عليها لأول مرة خلال الربع الأول من القرن التاسع عشر التشيكي بولزانو والفرنسي كوشي. تقول هذه النظرية – بتعبير بسيط – إننا لا نستطيع المرور من ضفة إلى أخرى عبر نهر بدون قفز ودون أن تبتلّ أقدامنا. ونعبّر عن ذلك رياضيا بالقول : إذا

أخذت دالة مستمرة لمتغير واحد إشارتين مختلفتين عند قيمتين a و b فـإن هذه الدالة تنعدم، على الأقل مرة واحدة، بين a و b. وهو ما يقول النص المألوف التالي :

نظرية (نقطة انعدام)

لتكن f دالة مستمرة على مجال متراص $[a,b]$. إن كان $f(a).f(b)<0$ فإنه توجد نقطة c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=0$.

البرهان

لنفرض مثلا بأن $f(a)>0$ (ومنه سيكون $f(b)<0$). ولنضع $X=\{x\in[a,b]:f(x)>0\}$ و $c=\sup X$. ولنبيّن أن $f(c)=0$.

من الواضح أن $a<c<b$. فلو كان $f(c)\neq 0$ لوجد مجال مركزه c تحتفظ فيه f بإشارتها الموجبة، وذلك بفضل استمرار f (وضّح ذلك). وهذا يناقض القول $c=\sup X$ الذي يعرف النقطة c. وبالتالي $f(c)=0$. نستنتج من ذلك هذا التعميم :

نظرية (نظرية النقطة المتوسطة)

لتكن $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة مستمرة على مجال كيفي I.   **ولتكن $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قيمتين لـــ f حيث $x_1<x_2$.**   **عندئذ من أجل كل عنصر c محصور بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ يوجد عنصر x_0 من المجال $]x_1,x_2[$ يحقق $f(x_0)=c$.**

ملاحظة

ينتج من ذلك أن صورة مجال عبر دالة مستمرة هي أيضا مجال. كما ينتج من هذه النظرية والتي سبقتها في حالة تراص المجال $[a,b]$ أن صورة هذا المجال هي المجال $\left[\sup_{x\in[a,b]} f(x), \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right]$.

5. الاشتقاق :

تعريف (مشتق تابع عند نقطة)

ليكن I مجالا مفتوحا من $\mathbb{R}$ و x_0 نقطة من I . و ليكن $f: I \to \mathbb{R}$ تابعا حقيقيا.

نقول عن f إنه قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت النهاية

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

موجودة و منتهية. تسمى هذه النهاية العدد المشتق (أو المشتق) للتابع f عند النقطة x_0 و نرمز لها بالرمز $f'(x_0)$ ، أي

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

ملاحظة

نستنتج من وحدانية النهاية أن مشتق تابع f عند نقطة x_0 ، وحيد (إن وجد).

يتضح من تعريف المشتق بكتابة

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x),$$

حيث $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

أمثلة

– إذا كان f ثابتا فإن $f'(x)=0$ مهما كان x من $\mathbb{R}$.

– إذا كان $f(x)=x$ فإن $f'(x)=1$ مهما كان x من $\mathbb{R}$.

ليكن $f(x)=\sqrt{x}$. لدينا $f'(1)=\frac{1}{2}$ ، لأن

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}$$

تعريف (المشتق من اليمين و المشتق من اليسار)

ليكن I مجالا مفتوحا من المشتق من اليمين و المشتق من اليسار $\mathbb{R}$ و x_0 نقطة من I.

و ليكن $f: I \to \mathbb{R}$ تابعا حقيقيا.

1. إذا قبلت النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية منتهية من اليمين عند x_0 نقول إن f يقبل الاشتقاق من اليمين عند x_0. تسمى هذه النهاية المشتق من اليمين، ونرمز لها بـــ $f'_d(x_0)$.

2. إذا قبلت النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية منتهية من اليسار عند x_0 نقول إن f يقبل الاشتقاق من اليسار عند x_0.

تسمى هذه النهاية المشتق من اليسار و نرمز لها بـــ $f'_g(x_0)$.

ملاحظات :

حتى يكون f قابلا للاشتقاق عند x_0 يلزم ويكفي أن يكون f قابلا للاشتقاق من اليمين ومن اليسار عند x_0.

قد يكون f قابلا للاشتقاق من اليمين ومن اليسار عند x_0 دون أن يكون قابلا للاشتقاق عند x_0 .

مثال لتابع لا يقبل الاشتقاق مع قبوله للمشتقين يمينا يسارا : ليكن $f(x)=|x|$. لندرس قابلية f للاشتقاق عند 0.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1 \quad , \quad \lim_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$$

إذن يقبل f الاشتقاق من اليمين ومن اليسار عند 0 لكنه غير قابل للاشتقاق عند 0.

التفسير الهندسي للمشتق :

ليكن (C) المنحني البياني للتابع f في مستو منسوب إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، M_0 نقطة من المنحني (C) فاصلتها x_0 .

إذا كان f قابلا للاشتقاق عند x_0 ، فإن (C) يقبل مماسا، عند النقطة M_0 ، معادلته

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

ميل مماس منحني التابع f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هو مشتق التابع f عند x_0 .

إذا كان f قابلا للاشتقاق من اليمين (من اليسار، على التوالي) عند x_0 فإن (C) يقبل، عند النقطة M_0 ، نصف مماس من اليمين (من اليسار، على التوالي) معامل توجيهه $f'_d(x_0)$ ($f'_g(x_0)$ ، على التوالي).

إذا كانت نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ غير منتهية عند x_0 فإن (C) يقبل، عند النقطة M_0، مماسا موازيا لـــ $(y'oy)$.

أمثلة :

التابع $x \mapsto |x|$ يقبل نصفي مماس، عند النقطة $o(0,0)$، ميل أحدهما 1 و ميل الآخر -1.

التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ لا يقبل الاشتقاق من اليمين عند 0 لأن

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

إذن المنحني البياني للتابع $x \mapsto \sqrt{x}$ يقبل نصف مماس مواز لـــ $(y'oy)$.

قضية (قابلية الاشتقاق والاستمرار)

إذا كان f قابلا للاشتقاق عند x_0 فإنه مستمر عند هذه النقطة.

البرهان :

ليكن f قابلا للاشتقاق عند x_0 أي

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

إذن

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\varepsilon(x),$$

حيث $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$. نستنتج أن

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\varepsilon(x).$$

بأخذ نهاية الطرفين لما x يؤول إلى x_0 نجد

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

أي أن f مستمر عند x_0.

ملاحظة :

القضية العكسية للقضية السابقة خاطئة. يمكن أن يكون تابع مستمرا عند نقطة دون أن يقبل الاشتقاق عند تلك النقطة. مثل ذلك : التابع $x\mapsto|x|$ مستمر عند 0، لكنه لا يقبل الاشتقاق عند 0.

نظرية (مشتق تركيب تابعين)

ليكن f تابعا قابلا للاشتقاق عند x_0 و g تابعا قابلا للاشتقاق عند $f(x_0)$.
عندئذ يقبل التابع $g\circ f$ الاشتقاق عند x_0 ، ولدينا
$(g\circ f)'(x_0)=g'[f(x_0)]\cdot f'(x_0).$

البرهان :

بما أن التابع g يقبل الاشتقاق عند $f(x_0)$ فإن

$$\frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}=g'(f(x_0))+\varepsilon(y),$$

حيث $\lim_{y\to f(x_0)}\varepsilon(y)=0$.

التابع f مستمر، إذن $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. بأخذ $y=f(x)$ نجد

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}=g'(f(x_0))+\varepsilon(f(x)).$$

أي

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}[g'(f(x_0))+\varepsilon(f(x))].$$

بجعل x يؤول إلى x_0 نحصل على

$$(g\circ f)'(x_0)=g'[f(x_0)]\cdot f'(x_0).$$

مثال :

حساب مشتق التابع $f(x)=\sin\sqrt{\ln x}$ **. من أجل** $x\in]1,+\infty[$

لدينا :

$$f'(x)=(\sqrt{\ln x})'\cos\sqrt{\ln x}$$
$$=\frac{(\ln x)'}{2\sqrt{\ln x}}\cos\sqrt{\ln x}$$
$$=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}\cos\sqrt{\ln x}\ .$$

نظرية (مشتق تابع عكسي)

> **ليكن** f **تطبيقا تقابليا ومستمرا على مجال** I **في مجال** J**، وقابلا للاشتقاق عند** x_0 **من** I**. إذا كان** $f'(x_0)\neq 0$ **فإن التابع العكسي** f^{-1} **يقبل الاشتقاق عند** $f(x_0)$ **، ولدينا :**
>
> $$(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

البرهان :

من أجل $t\in J$ **نضع** $x=f^{-1}(t)$ **، إذن** $t=f(x)$**. لدينا :**

$$\frac{f^{-1}(t)-f^{-1}(t_0)}{t-t_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

بما أن التابع f^{-1} **مستمر عند** t_0 **فإن** $\lim\limits_{t\to t_0}f^{-1}(t)=f^{-1}(t_0)$ **أي** $\lim\limits_{t\to t_0}x=x_0$.

كما أن f **يقبل الاشتقاق عند** x_0 **و** $f'(x_0)\neq 0$ **. إذن**

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f^{-1}(t)-f^{-1}(t_0)}{t-t_0}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

و هو المطلوب.

ملاحظة :

إذا كان $f'(x_0)=0$ **فإن المنحني البياني للتابع** f^{-1} **يقبل، عند النقطة** $t_0=f(x_0)$ **، مماسا موازيا لــ** $y'oy$.

مثال :

حساب مشتق التابع arcsin **على المجال المفتوح** $]-1,1[$ **. لدينا**

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)}$$
$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

باستخدام العلاقة المثلثية الشهيرة $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ **، نجد**

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=\sqrt{1-x^2}$$

و منه

$$\forall x\in\,]-1,1[,\quad \arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

بنفس الطريقة نحسب مشتق التابع arccos **على المجال المفتوح** $]-1,1[$ **فنجد**

$$\forall x\in\,]-1,1[,\quad \arccos' x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

تعريف (المشتقات ذات الرتب العليا)

ليكن f تابعا قابلا للاشتقاق على مجال I.
إذا قبل f' الاشتقاق على I نقول إن f يقبل مشتقا من الرتبة الثانية، ونرمز للمشتق الثاني بالرمز f'' .

ملاحظة :

نعرّف بالتراجع المشتق من الرتبة n لــ f ، ونرمز له بالرمز $f^{(n)}$ ، وهو تعريفًا مشتق التابع $f^{(n-1)}$ أي

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

إذا كان f قابلا للاشتقاق n مرة وكان المشتق $f^{(n)}$ مستمرا نقول إن التابع f من الصنف C^n، أو إنه قابل للاشتقاق n مرة باستمرار. ونقول عن f إنه من الصنف C^0 إذا كان مستمرا.

نظرية (شرط لازم لوجود قيمة قصوى)

إذا كان للتابع f قيمة قصوى عند النقطة x_0 وكان $f'(x_0)$ موجودا فإن $f'(x_0)=0$.

ملاحظات :

إن القضية العكسية خاطئة : إذا كان $f'(x_0)=0$ فإن قبول f لقيمة قصوى ليس أمرا مؤكدا. مثال ذلك التابع $x \mapsto x^3$ عند النقطة $x_0=0$: $f'(0)=0$ في حين أن التابع $x \mapsto x^3$ لا يقبل أية قيمة قصوى.

يمكن لتابع أن يقبل قيمة قصوى عند x_0 دون أن يكون قابلا للاشتقاق عند x_0. مثلا التابع $x\mapsto|x|$ يقبل قيمة صغرى عند $x_0=0$ في الوقت الذي لا يقبل فيه الاشتقاق عند هذه النقطة.

نظرية (رول Rolle (1652–1719))

> **ليكن** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **تابعا مستمرا وقابلا للاشتقاق على** $]a,b[$ **بحيث** $f(a)=f(b)$.
> **عندئذ توجد نقطة** $c\in]a,b[$ **تحقق** $f'(c)=0$.

البرهان :

التابع f مستمر على المجال $[a,b]$ ولذا فهو محدود وحداه m و M.

إذا كان $m=M$ فإن التابع f ثابت. ومنه $\forall c\in]a,b[,\quad f'(c)=0$.

إذا كان $m\neq M$ فإن التابع f يدرك على الأقل أحد حديه عند نقطة c مختلفة عن a و b، أي

$$\exists c\in]a,b[,\quad f'(c)=0 .$$

ملاحظة :

إذا كان $f(a)=f(b)=0$ يمكننا صياغة نظرية رول على الشكل : بين كل صفرين للتابع القابل للاشتقاق f يوجد صفر على الأقل للتابع f'.

نظرية (التزايدات المنتهية)

> **ليكن** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **تابعا مستمرا وقابلا للاشتقاق على** $]a,b[$.
> **عندئذ توجد نقطة** $c\in]a,b[$ **تحقق**
> $$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

البرهان :

تأتي هذه النظرية من نظرية رول. نضع

$$\phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

التابع ϕ **مستمر على** $[a,b]$ **وقابل للاشتقاق على** $]a,b[$ **. ولدينا** $\phi(a)=\phi(b)=0$.

حسب نظرية رول يوجد $c\in]a,b[$ **يحقق** $\phi'(c)=0$ **أي :**

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

و منه :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

نظرية (قاعدة لوبيتال (1661–1704))

> **ليكن** f **و** g **تابعين مستمرين على المجال** $[a,b]$ **وقابلين للاشتقاق على** $]a,b[$ **. وليكن** $x_0\in]a,b[$.
> عندئذ
> $$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=l\ .$$

البرهان : **يأتي من نظرية التزايدات المنتهية (المعممة).**

الفصل الثالث

الحساب التكاملي

1- مقدمة

2- التكامل الريماني

3- التكامل غير المحدود

4- من طرق المكاملة

5- خواص أخرى للدالة الأسية

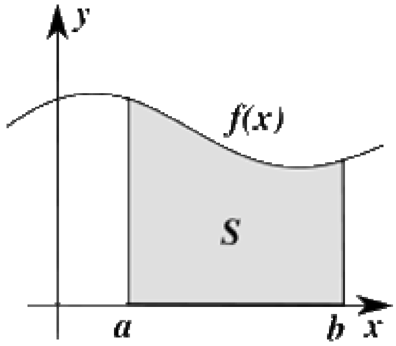
6- حساب بعض المساحات والحجوم

1. مقدمة :

يعتبر الحساب التكاملي أداة فعالة في الرياضيات وباقي الفروع العلمية إذ يسمح في الكثير من الحالات بالحصول على نتائج هامة تتعلق بحساب الأطوال والمساحات والحجوم وقيم أخرى ذات طابع فيزيائي أو اقتصادي، الخ. والملاحظ أن مسائل حساب المساحات ليست وليدة هذا العصر بل يعود طرحها إلى العصور القديمة، أما الحساب التكاملي بمفهومه الحديث فهو من إنتاج القرون الأخيرة بدءا من القرن السابع عشر (نيوتن Newton ولايبنتز Leibniz) إلى يومنا هذا (لوبيغ Lebesgue، بوخنيرBochner، بيتيس Pettis...).

2. تكامل ريمان :

يمكن من الناحية العملية تقديم تكامل ريمان على أنه ينطلق من الحاجة إلى التعبير عن مساحة منحصرة بين بيان تابع ومحور الفواصل ومستقيمين شاقوليين. فالمساحة الداكنة المبيّنة أدناه يمكن تمثيلها بتكامل الدالة f على المجال $[a,b]$:



لكن التعريف الدقيق لهذا التكامل يتطلب منا الانطلاق من دوال بسيطة تسمى الدوال الدرجية. فما هي هذه الدوال؟

تعريف (الدالة الدرجية)

> **ليكن** $I=[a,b]$ **مجالا من** $\mathbb{R}$.
> **نقول عن دالة** $f: I \to \mathbb{R}$ **إنها درجية إذا وجدت تقسيمة** $a =_0 < a_1 < a_2 < .... < a_n = b$ **للمجال** I **بحيث يكون**
> $\forall i = 0,...n-1,\ \exists c_i \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in [a_i, a_{i+1}[,\quad f(x) = c_i .$

ملاحظة :

يمكن في الكتابة السابقة تعويض $[a_i, a_{i+1}[$ بـــ $]a_i, a_{i+1}[$ واعتبار أية قيم لـــ f عند النقاط $(a_i)_{i=0,\dots,n-1}$.

لاحظ أننا نستطيع التعبير عن المساحة المنحصرة بين بيان تابع f ومحور الفواصل والمستقيمين الشاقوليين المعرفين بالمعادلتين $x=a$ و $x=b$ كما يلي : إنها تساوي

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i\,(a_{i+1}-a_i)\,.$$

ونكتب : $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\,(a_{i+1}-a_i)$. من المهم أن تلاحظ أيضا أن هذا التكامل (أي المساحة) لا تتعلق بقيم f عند النقاط $(a_i)_{i=0,\dots,n-1}$.

تلك هي المرحلة الأولى المؤدية إلى تكامل ريمان. وهناك مرحلة ثانية نود المرور عليها مر الكرام، وهي تتعلق بتكامل فئة من الدوال تسمى الدوال "المسواة". وتطلق هذه الصفة على كل دالة يمكن الحصول عليها كنهاية (منتظمة) لمتتالية دوال درجية. لن نتوقف عند هذه الفئة من الدوال لأن تفاصيلها تتطلب إدخال مفاهيم لم نتطرق إليها (ولم تذكر في البرنامج).

وتعريف تكامل ريمان الذي سنقدمه بعد حين من أجل تابع مستمر أو مستمر بتقطع يصدق على هذه الفئة من الدوال أيضا. ذلك

أن الدوال المستمرة والمستمرة بتقطع دوال "مسواة" (العكس غير صحيح).

ويبحث الرياضيون في تعميم مفهوم المكاملة. ومن بين الأسئلة المطروحة هي إيجاد أكبر مجموعة توابع تقبل المكاملة. وإذا كان إدخال مفهوم التوابع المسواة قد أجاب على جزء من السؤال فإننا نلاحظ أن هناك توابع مسواة ورغم ذلك فهي لا تقبل المكاملة بمفهوم ريمان. مثال ذلك التابع المعرف على المجال $[0,1]$ بـــ $f(\frac{1}{n})=1$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ والمنعدمة في باقي نقاط المجال $[0,1]$. هذا التابع يقبل المكاملة بمفهوم ريمان رغم أنه غير مسوى.

ولعل القارئ يتساءل عما إذا كانت هناك فائدة جادة من وراء البحث عن مكاملة مثل تلك الدوال غير المألوفة. تثبت الرياضيات المتقدمة أن الأمر لا يتعلق بعبث رياضي. بمعنى أننا مطالبين بالبحث عن مكاملة توابع أعم من التوابع المسواة. ولذلك أدخلت عدة مفاهيم للمكاملة أهمها تكامل لوبيغ Lebesgue الذي يسمح بمكاملة فئة أوسع من التوابع. ينبغي أن نلاحظ بأن تكاملي ريمان ولوبيغ يتطلبان أن يكون فضاء وصول الدالة مرتبا. وبطبيعة الحال فقد سعى الرياضيون إلى تعميم مفهوم المكاملة إلى الحالة التي يكون فيها فضاء الوصول غير مرتب، ذلك ما قام به مثلا بوخنر Bochner.

وعلى الرغم من أن تكامل لوبيغ ليس في البرنامج المسطر للمفتشين إلا أن أهميته في التحليل الرياضي كبيرة جدا، وهو الأكثر تداولا في الرياضيات الحديثة لأنه يسمح بإجراء عملية "المرور إلى النهاية" (كالمبادلة بين رمز التكامل والنهاية في العلاقات الرياضية) بدون تعقيدات مقارنة بتكامل ريمان.

ومن الناحية التاريخية فقد انطلق لوبيغ من تكامل ريمان لإنشاء التكامل الذي يحمل اليوم اسمه. يقول لوبيغ في مقارنة مفهومي تكامل ريمان مع تكامله : " تصور أن علي دفع مبلغ معين. يمكنني أن أخرج من محفظة نقودي قطعا الواحدة تلو الأخرى، بالصدفة، حتى يصبح مجموعها مساويا للمبلغ المطلوب. كما يمكنني أن أخرج كل نقودي دفعة واحدة، واختار منها القطع حسب قيمها ليكون مجموعها مساويا للمبلغ المطلوب".

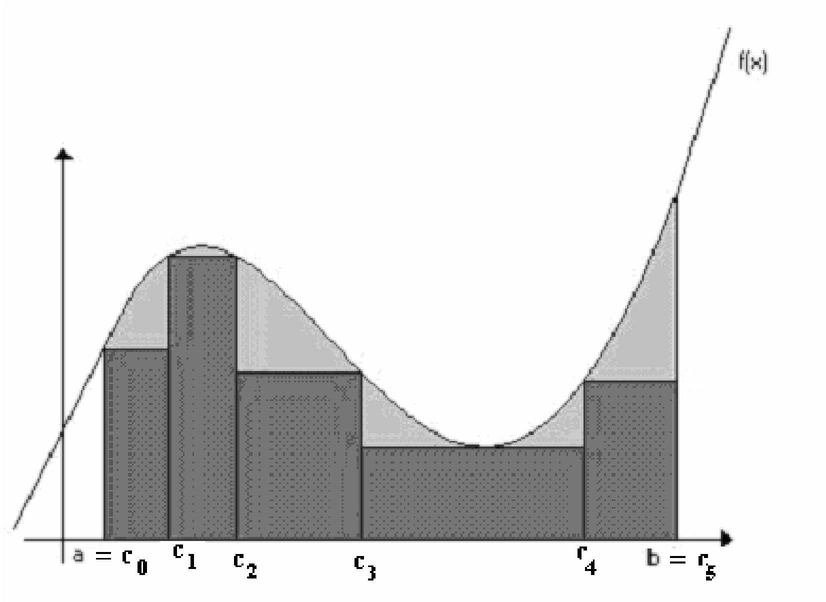
ثم يقول لوبيغ إن الطريقة الأولى هي تكامل ريمان، أما الطريقة الثانية فهي تكامل لوبيغ. بمعنى أن تكامل لوبيغ يمسح أفقيا القطعة المستقيمة التي نجري عليها المكاملة (المعرفة عليها الدالة f) ويقيس "الارتفاعات" الواحد تلو الآخر. أما تكامل لوبيغ فيعتبر "حجم" المجموعات المحصورة بين $y = f$ ومحور الفواصل. وقد سمح تكامل لوبيغ بظهور فرع جديد في الرياضيات وهو نظرية القياس.

تعريف (**مجموع ريمان**)

> **ليكن** $I=[a,b]$ **مجالا** **من** $\mathbb{R}$. **ولتكن** $d_n=\{a=_0<a_1<a_2<....<a_n=b\}$ **تقسيمة للمجال** I.
> **ولتكن دالة** $f:I\to\mathbb{R}$ **محدودة. نسمي**
> $$R(f,d_n,c)=\sum_{i=0}^{n-1}f(c_i)(a_{i+1}-a_i)$$
> حيث $c_i\in[a_i,a_{i+1}]$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، مجموع ريمان للتابع f وفق التقسيمة d_n وجملة النقاط $c=(c_i)_{i=0,...,n-1}$.

ملاحظة :

يمثّل $R(f,d_n,c)=\sum_{i=0}^{n-1}f(c_i)(a_{i+1}-a_i)$ **مجموع مساحات المستطيلات التي بعداها** $a_{i+1}-a_i$ **و** $f(c_i)$ **كما هو موضح في الشكل أدناه :**



تعريف (تكامل ريمان)

ليكن $I=[a,b]$ مجالا من $\mathbb{R}$ و $f:I\to\mathbb{R}$ دالة محدودة. إذا كانت نهاية مجموع ريمان $R(f,d_n,c)=\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(a_{i+1}-a_i)$ موجودة ولا تتعلق باختيار متتالية التقسيمات $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ واختيار جملة النقاط $c=(c_i)_{i=0,\ldots,n-1}$ فإننا نقول إن التابع f يقبل المكاملة على المجال I بمفهوم ريمان. وتكامل ريمان لهذا التابع هو (تعريفاً) :

$$\lim_{n\to+\infty} R(f,d_n,c)=\int_a^b f(x)dx .$$

ملاحظة :

إذا كنا نعلم أن التابع f يقبل المكاملة على المجال $I=[a,b]$ بمفهوم ريمان فإننا نستطيع اختيار متتالية تقسيمات متجانسة، أي متساوية الخطوة : $d_n=\{a=_0< a_1<a_2<....<a_n=b\}$ $a_{i+1}-a_i=\dfrac{b-a}{n}$ من أجل كل $i=0,\ldots,n$. وعندئذ يكون (في حالة وجود تكامل ريمان) :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} R(f,d_n,c)\\ &=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(a_{i+1}-a_i)\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i).\end{aligned}$$

وإذا ما اخترنا في العلاقة السابقة $c_i=a_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$ من أجل كل i فإننا نحصل على العلاقة التالية (في حالة وجود التكامل) :

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}.\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n}) .$$

نؤكد على أن قيام هذه العلاقة لا تؤدي حتما إلى وجود تكامل ريمان.

ملاحظة :

نعتبر تقسيمة متجانسة ونضع :

$$I_n = \frac{b-a}{n}\left(f(a_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right)$$
$$J_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right).$$

نلاحظ أن

$$\begin{aligned} J_n - I_n &= \frac{b-a}{n}\left(f(a_n)-f(a_0)\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right). \end{aligned}$$

وأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)=0$

فإذا افترضا أن المتتالية I_n متقاربة فإن الأمر كذلك بالنسبة للمتتالية J_n، والعكس بالعكس. وفي حالة التقارب نحصل على المساواة $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

مثال :

احسب التكامل $\int_0^1 x^2 dx$ **باعتبار أنه موجود.**

نستعمل تقسيمة متجانسة فيأتي (علما أن

$$(\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1-0)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(0+i\,\frac{(1-0)}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1-0)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(0+i\,\frac{(1-0)}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2}
\end{aligned}$$

أي

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \\
&= \frac{2}{6} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

تقدم النظرية التالية شرطا لازما وكاف لكي يقبل تابع محدود المكاملة على مجال متراص.

نظرية (داربو Darboux)

نحافظ على الرموز السابقة.

ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **تابعا محدودا. نضع**

$$S(f,d_n)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i).\sup_{x_i\in[a_i,a_{i+1}]} f(x_i),$$

$$s(f,d_n)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i).\inf_{x_i\in[a_i,a_{i+1}]} f(x_i).$$

يسمى $S(f,d_n)$ **و** $s(f,d_n)$ **مجموعي داربو العلوي والسفلي.**

يكون $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **قابلا للمكاملة إذا وفقط إذا كان**

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists d_n:\quad S(f,d_n)-s(f,d_n)<\varepsilon.$$

تطبيقا لنظرية داربو نقدم النتيجة التالية :

نظرية

كل تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **رتيب يقبل المكاملة.**

البرهان :

نطبق نظرية داربو. نفرض مثلا أن f **متزايد تماما. فنلاحظ أن**

$$S(f,d_n)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i).\sup_{x_i\in[a_i,a_{i+1}]} f(x_i)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i).f(a_{i+1})$$

$$s(f,d_n)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i).\inf_{x_i\in[a_i,a_{i+1}]} f(x_i)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i).f(a_i)$$

ومنه :

$$\begin{aligned} S(f,d_n)-s(f,d_n) &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i).\big(f(a_{i+1})-f(a_i)\big) \\ &\leq \max_i(a_{i+1}-a_i)\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(a_{i+1})-f(a_i)\big) \\ &= (f(b)-f(a)).\max_i(a_{i+1}-a_i). \end{aligned}$$

ليكن $\varepsilon>0$. نختار التقسيمة d_n بحيث تحقق العبارة $(f(b)-f(a)).\max_i(a_{i+1}-a_i)$ المتباينة التالية $(f(b)-f(a)).\max_i(a_{i+1}-a_i)<\varepsilon$ .. هذا يعني أننا نختار الفروق $a_{i+1}-a_i$ صغيرة بكفاية. وبذلك يتأكد الشرط اللازم والكافي الوارد في نظرية داربو.

نلاحظ أنه إذا كان التابع ثابتا فإن مجموعي داربو العلوي والسفلي متساويان، ومن ثم ففرقهما منعدم ويحقق بداهةً شرط داربو.

وهذا تطبيق ثان لنظرية داربو : من بين التوابع القابلة للمكاملة التوابع المستمرة. ذلك ما تنصّ عليه النظرية التالية.

نظرية

كل تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمر يقبل المكاملة.

البرهان :

نستفيد هنا من نظرية تميز التوابع المستمرة على مجال متراص، وهي القائلة إن كل تابع مستمر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ على المتراص $[a,b]$ مستمر بانتظام، أي

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:\ |x'-x''|<\alpha\ \Rightarrow\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

ولا مانع أن نكتب هذه العلاقة على الشكل إن سهلت علينا الحسابات :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:\ |x'-x''|<\alpha\ \Rightarrow\ |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

لتكن $\varepsilon>0$. نختار تقسيمة بحيث $\max_i(a_{i+1}-a_i)<\alpha$. لاحظ أن ذلك يستلزم

$$\left|\sup_{x_i\in[a_i,a_{i+1}]}f(x_i)-\inf_{x_i\in[a_i,a_{i+1}]}f(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

وعندئذ فإن

$$\begin{aligned}S(f,d_n)-s(f,d_n)&=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i).\left(\sup_{x_i\in[a_i,a_{i+1}]}f(x_i)-\inf_{x_i\in[a_i,a_{i+1}]}f(x_i)\right)\\&\le\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

ملاحظة :

نوجز في ما يلي بعض خواص تكامل ريمان، ويمكن للقارئ التأكد من صحتها (علما أننا نضع اتفاقا : $\int_a^a f(x)dx = 0$) :

1. إذا كان $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلا للمكاملة فإنه يقبل المكاملة على كل مجال جزئي من $[a,b]$.

2. علاقة شال Chasles: إذا كان $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلا للمكاملة وكان $c\in]a,b[$ فإن f يقبل المكاملة على كل من المجالين $[a,c]$ و $[c,b]$، ولدينا :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

يمكن تعميم هذه النتيجة إلى أكثر من نقطة c.

3. لدينا : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4. إذا كان التابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ محدودا وقابلا للمكاملة على كل مجال $[a',b']\subset]a,b[$ فإنه يقبل المكاملة على $[a,b]$.

5. تشكل مجموعة التوابع القابلة للمكاملة على مجال $[a,b]$ فضاء شعاعيا على $\mathbb{R}$: إذا كان f و g قابلين للمكاملة على $[a,b]$

فإن

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$
$$\lambda\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lambda . f(x)dx;\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

وبالتالي فإن تطبيق المكاملة $\int_a^b$ من الفضاء الشعاعي المؤلف من التوابع القابلة للمكاملة

نحو $\mathbb{R}$ تطبق خطي. يمكن تعميم ذلك إلى التوابع ذات القيم العقدية.

كما أن جداء تابعين قابلين للمكاملة تابع قابل للمكاملة.

6. إذا كان التابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلا للمكاملة فإن الاستلزام التالي قائم :

$$\forall x\in[a,b],\quad f(x)\geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 .$$

ومنه يأتي : إذا كان التابعان $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ و $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلان للمكاملة فإن الاستلزام التالي قائم :

$$\forall x\in[a,b],\quad f(x)\geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx .$$

ولما كان $f\leq|f|$ فإن هذه الخاصية تستلزم أن لدينا دوما :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx .$$

7. إذا كان التابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرا فإن الاستلزام التالي قائم :

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow \forall x\in[a,b],\quad f(x)=0 .$$

البرهان يتم بالخلف.

8. إذا كان التابعان $f\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ و $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلان للمكاملة فإن (متباينة كوشي – شفارتز Cauchy-Schwarz):

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\times\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\ .$$

لنبرهن على هذه الخاصية. نعلم أن مجموعة التوابع القابلة للمكاملة تشكل فضاء شعاعيا، وبالتالي فالتابع $g+\lambda f$ يقبل المكاملة من أجل كل عدد حقيقي λ. نعتبر ثلاثي الحدود بالنسبة لـــ λ، مع الملاحظة أنه موجب (وبالتالي فهو يحافظ على إشارته):

$$P(\lambda)=\int_a^b\left(f(x)+\lambda g(x)\right)^2dx=\int_a^b f^2(x)dx+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx$$

ومن ثم فمميزه (المختصر) سالب. وهذا يعني :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\times\int_a^b g^2(x)dx\ .$$

ومنه تأتي علاقة كوشي – شفارتز.

3. التكامل غير المحدد

يمكن أن نعرّف التكامل غير المحدد بالطريقة التالية

تعريف (التكامل غير المحدد/ التابع الأصلي)

ليكن $f : I \to \mathbb{R}$ **تابعا معرفا على مجال** $I = (a,b)$ **(مغلق أو غير مغلق). يسمى كل تابع** F **(معرف على مجال** $J \subseteq I$**) يحقق المعادلة (التفاضلية)**

$$\forall x \in J, \qquad F'(x) = f(x)$$

تكامل غير محدد للتابع f**. ونرمز لهذا التكامل بـــ** $F = \int f(x)dx$**.**

يسمى التابع F **تابعا أصليا لــ** f **على المجال** J**.**

ملاحظة :

لاحظ أن كل تابع أصلي مستمر إذ أنه يقبل الاشتقاق. تأمل في المثال التالي: هل يقبل التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **غير المستمر المعرف بـــ**

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

تابعا أصليا؟ الجواب : نعم، وهذا تابع أصلي له :

$$F(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

إن f **غير مستمر (عند الصفر) بينما نلاحظ أن التابع الأصلي** F **مستمر.**

نظرية (مجموعة التوابع الأصلية)

إذا قبل التابع $f : I \to \mathbb{R}$ تابعا أصليا F على المجال I فإن f يقبل عددا غير منته من التوابع الأصلية على المجال I.

كل التوابع الأصلية G تكتب عندئذ على الشكل $G = F + \lambda$ حيث λ ثابت حقيقي، أي أن :

$$\forall x \in I, \qquad G(x) = F(x) + \lambda.$$

هناك توابع لا تقبل توابع أصلية، وأخرى تقبل مثل تلك التوابع. النظرية التالية تقدم فئة شهيرة من التوابع التي تقبل توابع أصلية.

نظرية (وجود تابع أصلي)

إذا كان التابع $f : I \to \mathbb{R}$ مستمرا فإنه يقبل عددا غير منته من التوابع الأصلية.

ليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا. إنه يقبل عددا غير منته من التوابع الأصلية على I. وإذا كان F و G تابعين أصليين لـــ f على I فإنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث

$$\forall x \in I, \qquad G(x) = F(x) + \lambda .$$

نلاحظ عندئذ

$$\forall(a,b)\in I^2,\qquad G(b)-G(a)=F(b)-F(a).$$

تعريف (تكامل تابع)

ليكن $f: I\to\mathbb{R}$ **تابعا مستمرا. يسمى العدد** $F(b)-F(a)$ **تكامل** f **من** a **إلى** b **و نكتب** $[F(x)]_a^b$ **أو** $\int_a^b f(x)dx$ **، أي**

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a).$$

ونقول إن f **قابل للمكاملة على المجال** $[a,b]$.

مثالان

1)

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\qquad\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\qquad\int_a^b\lambda dx=[\lambda x]_a^b=\lambda(b-a)$$

2) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=[\arctan]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$.

ملاحظات :

1) **يمكن البرهان على أن قابلية المكاملة هنا هي بمفهوم ريمان.**

2) **يمكن إثبات علاقة شال السالفة الذكر استنادا إلى خواص الدوال الأصلية: إذا كان** F **تابعا أصليا للتابع** f **على المجال** $[a;b]$ **فإن**

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

$$=F(b)-F(c)+F(c)-F(a)$$
$$=\int_c^b f(x)dx+\int_a^c f(x)dx.$$

3) يمكن أيضا إثبات خطية عملية المكاملة اعتمادا على الدوال الأصلية :

ليكن f و g تابعين مستمرين على مجال $I=[a,b]$، وليكن α و β عددين حقيقيين. لدينا :

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

لرؤية ذلك نعتبر دالتين أصليتين F و G للتابعين f و g على المجال I، ونلاحظ :

$$(\alpha F+\beta G)'=\alpha f+\beta g.$$

ومنه يتضح أن $\alpha F+\beta G$ دالة أصلية للدالة $\alpha f+\beta g$ على I. إذن

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)dx &= [(\alpha F+\beta G)(x)]_a^b\\ &=(\alpha F(b)+\beta G(b))-(\alpha F(a)+\beta G(a))\\ &=\alpha\big(F(b)-F(a)\big)+\beta\big(G(b)-G(a)\big)\\ &=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

التوابع الأصلية المتداولة

الدالة	الدوال الأصلية	ملاحظات
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+k$	$\alpha \in \mathbb{R}, \qquad \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+k$	
$\sin x$	$-\cos x+k$	
$\cos x$	$\sin x+k$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot anx+k$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+k$	
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\|+k$	
$\text{ctn}x$	$\ln\|\sin x\|+k$	
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}+k$	$\lambda \in IR^*$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x+k$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+k$	$=-\arccos x+k'$

4. من طرق المكاملة :

1. تبديل المتغير :

نظرية (حالة التوابع الأصلية)

ليكن $u:I\to J$ تابعا من الصنف C^1 (أي يقبل الاشتقاق والتابع المستق مستمر). وليكن f تابعا مستمرا على المجال J . إذا كان F تابعا أصليا لـــ f على J فإن $F\circ u$ تابع أصلي للتابع $(f\circ u)u'$ و

$$\int f(u(x))u'(x)dx=F\circ u(x)+c.$$

حيث c ثابت حقيقي.

البرهان :

حسب نظرية مشتق تركيب تابعين لدينا

$$(F\circ u)'=(F'\circ u)u'$$
$$=(f\circ u)u' .$$

وعليه فإن $F\circ u$ تابع أصلي للتابع $(f\circ u)u'$.

مثالان

1. **لدينا من أجل كل** $c\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int 1.\ln x dx\\ &= x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= x\ln x-x+c.\end{aligned}$$

2. لدينا من أجل كل $c \in \mathbb{R}$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$
$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

وقد اخترنا هنا $f(x) = x$ و $g(x) = \arctan x$.

نظرية (تبديل المتغير)

ليكن f تابعا مستمرا على مجال J يشمل العدديين a و b.
وليكن u تابعا من الصنف C^1 على مجال I يشمل α و β
بحيث $u(\alpha)=a$ و $u(\beta)=b$. نفرض من أجل كل x محصور بين α و β ، $u(x)$ ينتمي إلى المجال J . عندئذ

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)dx.$$

البرهان

حسب النظرية السابقة (حالة التوابع الأصلية)، إذا كان F تابعا أصليا لـــ f فإنه

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(u(x))u'(x)dx &= \left[F \circ u(x)\right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_{a}^{b} f(t)dt.\end{aligned}$$

من الناحية العملية نقوم بما يلي : لحساب التكامل $\int_a^b f(t)dt$ نضع $t=u(x)$ و dt تصبح $u'(x)dx$، وحدا التكامل a و b يصبحان α و β، حيث $u(\alpha)=a$ و $u(\beta)=b$. وينبغي ألا ننسى التأكد من أن التابعين f و u يحققان شروط النظرية.

مثال

أحسب التكامل $I=\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$.

نضع $t=\sin x$، dt تصبح $\cos x dx$ وحدا التكامل الجديد هما 0 و $\frac{\pi}{2}$. إذن

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\cos x dx \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx\end{aligned}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$
$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

علما أن شروط النظرية محققة في التوابع الوارد في المثال.

2. المكاملة بالتجزئة

نعلم أن $f'\cdot g+f\cdot g'$ **تابع أصلي لـ** $f\cdot g$ **. ومن ثم تأتي النظرية التالية**

نظرية (المكاملة بالتجزئة)

إذا كان f **و** g **تابعين من الصنف** C^1 **على المجال** I**، وكانت a و b نقطتين من** I **فإن** $$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

مثال

احسب $\int_0^2 xe^{-x}dx$.

لدينا :

$$\int_0^2 xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^2-\int_0^2 -e^{-x}dx$$
$$=-2e^{-2}+\left[-e^{-x}\right]_0^2$$
$$=-2e^{-2}-e^{-2}+1$$
$$=-3e^{-2}+1.$$

3. التوابع الأصلية لتابع كسري

يكتب كل كسر ناطق بكيفية وحيدة كمجموع لكثير حدود ولعدد منته من الكسور الناطقة ذات الشكل (حيث m و n عددان طبيعيان) :

$$\frac{A}{(x-a)^n},$$

$$\frac{Bx+C}{((x-b)^2+c^2)^m}.$$

وعليه يكفي البحث عن التوابع الأصلية للكسرين السابقين.

حالة 1 :

تعيين التوابع الأصلية للتابع $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^n}$.

1. إذا كان $n=1$ فإن

$$\int \frac{1}{x-a}dx=\ln|x-a|+c$$

2. إذا كان $n>1$ فإن

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}dx=\frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+c$$

حالة 2 :

تعيين التوابع الأصلية للتابع $x \mapsto \frac{1}{x^2+px+q}$ إذا لم يقبل x^2+px+q جذورا حقيقية. في هذه الحالة يكون x^2+px+q موجبا تماما.

نضع $x^2+px+q=u^2+a^2$. عندئذ

$$\int \frac{1}{u^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+c$$

مثال

حساب $\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$.

لدينا $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ ، **إذن**

$$\int\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+c$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$$

حالة 3 :

تعيين التوابع الأصلية للتابع $x\mapsto\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ **إذا لم يقبل** x^2+px+q **جذورا حقيقية.**

لحساب هذا التكامل نظهر مشتق المقام في البسط فنحصل على تكاملين أحدهما من الشكل المدروس سابقا.

مثال

حساب $\int\frac{-3x+2}{x^2-x+1}dx$.

$$\int\frac{-3x+2}{x^2-x+1}dx=\int\frac{-\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$=-\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$$

تمرين 1

باستخدام طريقة تبديل المتغير أثبت ما يلي

1) $(a\in\mathbb{R})$ $\qquad \int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)+c,$.

2) $(a\in\mathbb{R}^*)$ $\qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c,$.

الحل

1) بوضع $t=a^2+x^2$ نجد $dt=2xdx$. إذن

$$\int\frac{x}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln t+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)+c$$

2

) لدينا

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}dx \,.$$

نضع $t=\frac{x}{a}$ فنجد $dt=\frac{1}{a}dx$. إذن

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{a}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{a}\arctan t+c$$

$$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$$

تمرين 2

احسب التكامل التالي

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx.$$

نقوم قس البداية بتفكيك الكسر على الشكل

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{x+1}+\frac{cx+d}{x^2+x+1}.$$

وبالمطابقة نجد $a=-3$ ، $b=-1$ ، $c=1$ ، $d=3$. ومنه

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx=3\int \frac{-1}{(x+1)^2}dx-\int \frac{1}{x+1}dx+\int \frac{x+3}{x^2+x+1}dx.$$

نلاحظ بعد ذلك :

$$\int \frac{-1}{(x+1)^2}dx=\frac{1}{x+1}+c_1,$$

و

$$\int \frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+c_2,$$

و

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+x+1}dx &= \int \frac{1/2(2x+1)+5/2}{x^2+x+1}dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{5}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + c_3$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{3}} + c_3.$$

وعليه

$$I = \frac{3}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{5}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{3}} + c.$$

5. طول قوس من منحنى :

يتطلب حساب أطوال الأقواس تعريف القوس والحديث عن التوابع التي تكون مجموعة تعريفها $\mathbb{R}^n$. سوف يكون هذا الحديث مقتضبا، ونكتفي بأقصر الطرق للوصول إلى تعريف طول قوس.

تعريف (المنحنى)

المنحنى في $\mathbb{R}^n$ هو تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

نسمي النقطتين $f(a)$ و $f(b)$ طرفي المنحنى.

نقول عن المنحنى إنه مغلق إذا كان $f(a) = f(b)$.

نقول عن المنحنى إنه بسيط إذا كان f متباينا على $[a,b[$، أي إذا كان المنحنى لا يتقاطع مع ذاته.

نقول عن المنحنى إنه منحنى جوردان Jordan إذا كان مغلقا ومتباينا على $]a,b[$.

مثال :

صورة المنحنى $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ المعرف بـــ $f(t) = (\sin t, \cos t)$ هي دائرة الوحدة في المستوي. وهو منحنى مغلق وجورداني. وهو غير بسيط لو استبدلنا $[0,2\pi]$ بـــ $\mathbb{R}$.

نتناول الآن تعريف طول قوس (أو منحنى) $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$:

لتكن $d_n = \{a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b\}$ تقسيمة للمجال $[a,b]$. نضع

$x_i = f(a_i)$ من أجل كل $i = 0,1,...,n$. نرمز بـــ L_{d_n} لمجموع أطوال القطع المستقيمة $[a_i, a_{i+1}]$ من أجل كل $i = 0,1,...,n$، أي

$$L_{d_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\|$$

حيث يرمز $\|.\|$ للنظيم الأقليدي في $\mathbb{R}^n$.

من الواضح أنه كلما كانت التقسيمة d_n أدق كلما اقترب الطول L_{d_n} من طول القوس f.

تعريف (طول قوس)

نرمز بـــ $P([a,b])$ لمجموعة التقسيمات الممكنة للمجال $[a,b]$.   نقول إن المنحنى $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ قابل للتقويم rectifiable إذا كانت المجموعة $\{L_{d_n}, \quad d_n \in P([a,b])\}$ محدودة من الأعلى.   في هذه الحالة نسمي طول القوس $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ الحد الأعلى $L(f)$ للمجموعة السابقة، أي $$L(f) = \sup\{L_{d_n}, \quad d_n \in P([a,b])\}.$$ إذا كانت المجموعة $\{L_{d_n}, \quad d_n \in P([a,b])\}$ غير محدودة من الأعلى فهذا يعني أن $L(f) = \infty$.

يمكن إثبات النظرية التالية

نظرية (حساب طول قوس)

ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ منحنيا يقبل الاشتقاق ومشتقه مستمرا (أي أن كل مركبة من مركبات $f=(f_1,f_2)$ تقبل الاشتقاق ومشتقها مستمر). عندئذ يكون f قابلا للتقويم وطوله هو

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_a^b \|f'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2+\left(f_2'(t)\right)^2}\, dt. \end{aligned}$$

مثال 1

احسب محيط الدائرة ذات نصف القطر R.

نصف المنحني الذي يمثل الدائرة المعطاة بالتابع $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ المعرف بـــ $f(t)=(R\sin t, R\cos t)$. لدينا عندئذ $f'(t)=(R\cos t,-R\sin t)$. ومنه :

$$\|f'(t)\|=\sqrt{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}=R.$$

إذن :

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2+\left(f_2'(t)\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} R dt \\ &= R\int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi R. \end{aligned}$$

وهذا هو بالضبط محيط الدائرة التي نعرفه منذ زمان !

مثال 2 :

احسب طول القوس الحلزوني $f:[0,T]\to\mathbb{R}^3$ **المعرف بـــ** $f(t))(R\cos t, R\sin t, ct)$ **حيث** T **و** c **و** R **أعداد حقيقية موجبة تماما. لدينا عندئذ** $f'(t)=(-R\sin t, R\cos t, c)$. ومنه :

$$\|f'(t)\|=\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t+c^2}=\sqrt{R^2+c^2}$$

إذن :

$$\begin{aligned}
L(f)&=\int_0^T\|f'(t)\|dt\\
&=\int_0^T\sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2+\left(f_2'(t)\right)^2+\left(f_2'(t)\right)^2}dt\\
&=\int_0^T\sqrt{R^2+c^2}dt\\
&=\sqrt{R^2+c^2}\int_0^T dt\\
&=T\sqrt{R^2+c^2}.
\end{aligned}$$

مثال 3 :

احسب طول قوس المنحني $f:[0,2]\to\mathbb{R}^3$ **المعرف بـــ** $f(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, 0)$.

لدينا عندئذ $f'(t)=\left(e^t(\cos t-\sin t), e^t(\sin t+\cos t), 0\right)$.

ومنه:

$$\begin{aligned}
\|f'(t)\|&=\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+0}\\
&=e^t\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

إذن :

$$L(f)=\int_0^T \|f'(t)\|dt$$
$$=\sqrt{2}\int_0^2 e^t dt$$
$$=\sqrt{2}(e^2-1).$$

تعريف (**تكافؤ منحنيين**)

نقول عن المنحنيين $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ **و** $g:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ **إنهما متكافئان إذا وجد تابع تقابلي ومستمر** $h:[c,d]\to[a,b]$ **بحيث** $g=f\circ h$.

مثال :

المنحنيان $f:[0,2]\to\mathbb{R}^2$ **و** $g:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ **المعرفان بـــ** $f(t)=(t,0)$ **و** $g(t)=(t^2+t,0)$ **متكافئان. يكفي وضع** $h(t)=t^2+t$.

تمرين 3

أثبت أن المنحنيين $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ **و** $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ **المعرفين بـــ** $f(t)=(\frac{2-2t^2}{1+t^2},\frac{4t}{1+t^2})$ **و** $g(s)=(2\cos\frac{s}{2},2\sin\frac{s}{2})$ **متكافئان.**

الحل

لنكتب شكليا أن التابع $h:[0,\pi]\to[0,1]$ **يحقق** $g=f\circ h$، **أي**

$$\forall s\in[0,\pi],\qquad g(s)=f\left(h(s)\right)$$

وهذا يعني

$$\forall s\in[0,\pi],\quad g(s)=f\,(h(s))=\left(\frac{2-2h^2(s)}{1+h^2(s)},\frac{4h(s)}{1+h^2(s)}\right)=(2\cos\frac{s}{2},\sin\frac{s}{2})$$

ومنه :

$$\forall s\in[0,\pi],\quad \begin{cases}\dfrac{1-h^2(s)}{1+h^2(s)}=\cos\dfrac{s}{2}\\ \dfrac{2h(s)}{1+h^2(s)}=\sin\dfrac{s}{2}\end{cases}$$

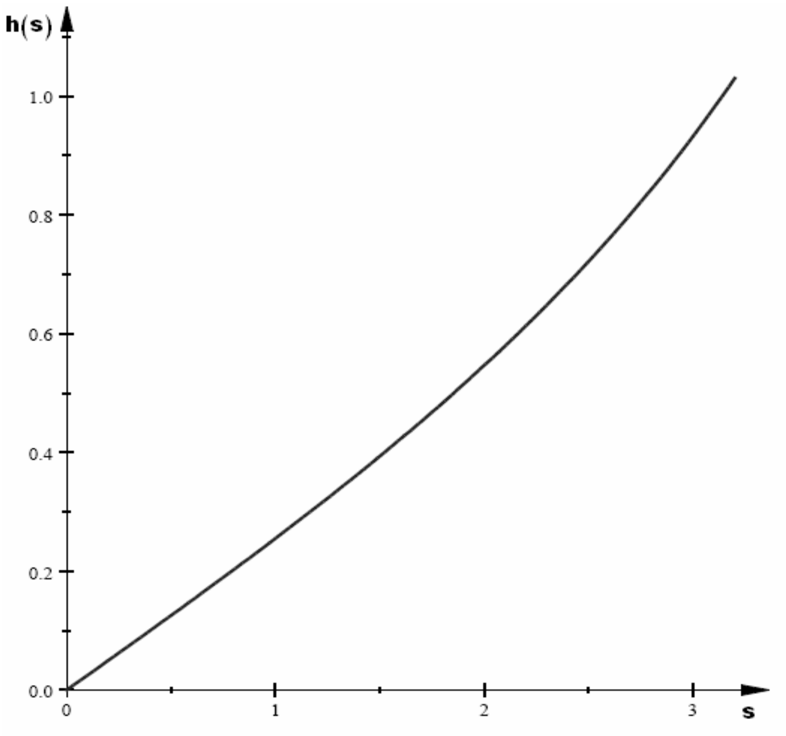
وبالتالي

$$\begin{aligned}\forall s\in[0,\pi],\quad \cos\frac{s}{2}&=\frac{1+h^2(s)-2h^2(s)}{1+h^2(s)}\\ &=1-\frac{2h^2(s)}{1+h^2(s)}\\ &=1-h(s).\sin\frac{s}{2}.\end{aligned}$$

مع العلم أن $\dfrac{2h(s)}{1+h^2(s)}=\sin\dfrac{s}{2}$ تستلزم $h(0)=0$. ومن ثمّ

نستخلص بناء عما سبق أن

$$h(s)=\begin{cases}0, & s=0,\\ \dfrac{1-\cos\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}, & s\in\,]0,\pi].\end{cases}$$



إن التابع h مستمر وتقابلي من $[0,\pi]$ إلى $[0,1]$ حيث أنه يقبل الاشتقاق ومشتقه موجب تماما (فهو إذن متزايد تماما) :

$$h'(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & ,s=0\\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{1-\cos\dfrac{s}{2}}{\sin^2\dfrac{s}{2}} & ,s\in\,]0,\pi].\end{cases}$$

نظرية (طولَا منحنيين متكافئين)

إذا كان منحنيان $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ **و** $g:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ **متكافئي، وكان أحدهما قابلا للتقويم فإن الآخر يقبل أيضا التقويم، ولهما نفس الطول.**

مثال

نعلم أن المنحنيين $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ **و** $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ **المعرفين بـــ** $f(t)=(\frac{2-2t^2}{1+t^2},\frac{4t}{1+t^2})$ **و** $g(s)=(2\cos\frac{s}{2},2\sin\frac{s}{2})$ **متكافئان.**

نلاحظ أن

$$\begin{aligned}L(g)&=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(g_1^{'}(s)\right)^2+\left(g_2^{'}(s)\right)^2}ds\\&=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\frac{s}{2}+\cos^2\frac{s}{2}}ds\\&=\int_0^{\pi}ds\\&=\pi.\end{aligned}$$

وبالتالي فإن $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ **يقبل التقويم وطوله يساوي** $L(f)=\pi$.

تمرين 4 :

ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **تابعا قابلا للاشتقاق. أثبت أن طول بيانه يساوي**

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(s)\right)^2}\,ds\ .$$

الحل

يكفي اعتبار التابع $g:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ **المعرف بـــ** $g(t)=(t,f(t))$ **الذي يمثل بيان التابع** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
وعليه فطول القوس $g:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ **هو طول بيان** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. **إذن**

$$l=L(g)=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(g_1'(s)\right)^2+\left(g_2'(s)\right)^2}\,ds$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\left(f'(s)\right)^2}\,ds.$$

مثال ذلك : **التابع** $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ **المعرف بـــ** $f(x)=x^2$. **إن طول بيانه يساوي** :

$$l=\int_0^a\sqrt{1+2x}\,dx=\frac{1}{3}(1+2a)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\,.$$

تمرين 5 :

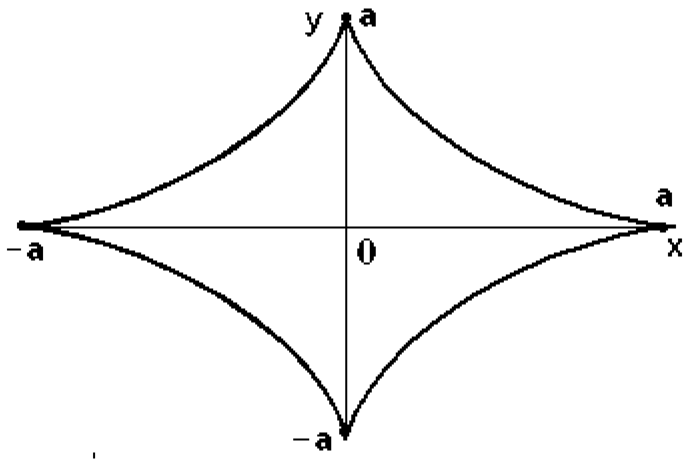
عين طول القوس المغلق المعرف بـــ $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$ **حيث** $0<a$.

إرشاد : **يمكنك وضع** $(x,y)=\left(a\cos^3 t,a\sin^3 t\right)$ **حيث** t **وسيط.**

الحل

نلاحظ أن $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$ **تستلزم أن** $0\le x\le a$ **و** $0\le y\le a$. **ومن ثم يمكن وضع** $(x,y)=\left(a\cos^3 t, a\sin^3 t\right)$.

وبذلك نتأكد فعلا أن $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$. **انظر الشكل الممثل للمنحنى**



المطلوب تعيين الطول l **للقوس المغلق. نلاحظ أن المنحني** $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ **المعرف بــ** $f(t)=\left(a\cos^3 t, a\sin^3 t\right)$ **مغلق حيث أن** $f(0)=f(\pi)=(a,0)$. **ومن ثم فإن** $l=L(f)$.

$$
\begin{aligned}
l=L(f)&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(f_1^{'}(t)\right)^2+\left(f_2^{'}(t)\right)^2}dt\\
&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(3a\left[\cos^2 t\right]\left[-\sin t\right]\right)^2+\left(3a\left[\sin^2 t\right]\left[\cos t\right]\right)^2}dt\\
&=\int_0^{2\pi}3a\left|\cos t.\sin t\right|dt\\
&=6a.
\end{aligned}
$$

6. حساب بعض المساحات والحجوم

يتطلب حساب مساحات السطوح الحجوم المجسمات إدخال التكاملات المضاعفة (الثنائي، الثلاثي، ...)، وهو تعميم للتكامل الأحادي، لكنه يتطلب تمهيدات مطولة. وعليه سنكتفي في هذا الموضوع بتقديم مساحات وحجوم عدد قليل من السطوح والمجسمات دون الغوص في الجانب التقني المتعلق بالتكاملات.

1. تعريف المخروط :

يستحسن الحديث عن تعريف المخروط قبل تقديم مساحته وحجمه. في الهندسة الأولية المخروط هو السطح الذي نحصل عليه بجعل مثلث قائم يدور حول أحد ضلعيه القائمين. في هذه الحالة تسمى المساحة التي يمسحها (وهي قرص) الضلع القائم الآخر قاعدة المخروط.

أما ارتفاع المخروط فهو طول الضلع الذي يدور حوله المثلث. كما يسمى طرف هذا الضلع الذي لا يمس القاعدة رأس المخروط.

نصف زاوية الرأس للمخروط هي الزاوية المثلث القائم التي رأسها رأس المخروط.

وبعبارة أوضح :

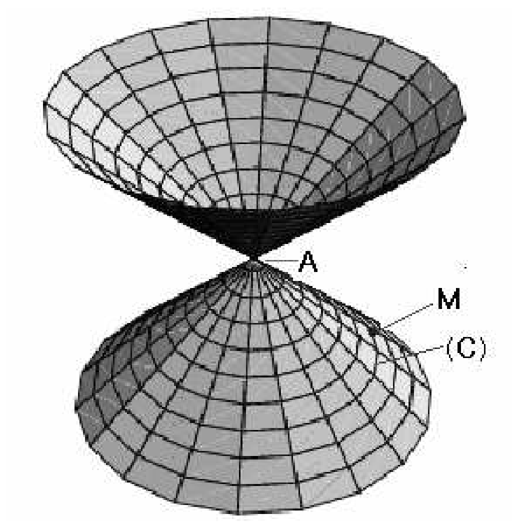
إذا كان ABC مثلثا قائما في B وجعلناه يدور حول الضلع AB فإن

* A هو رأس المخروط،
* الطول BC هو ارتفاعه،
* قاعدته هي القرص الذي مركزه B ونصف قطره BC الواقع في المستوي العمودي على المستقيم (AB)، ونصف زاويته هي $\widehat{BAC}$.

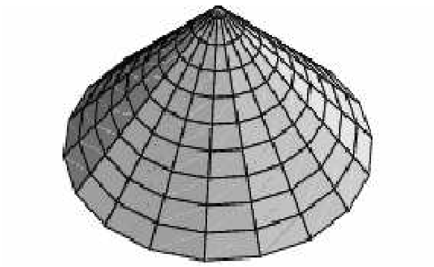
ملاحظة:

1) يسمى المخروط الذي عرّفناه آنفا مخروطا دورانيا أو قائما، وهو الذي نعنيه عموما. لكن المفهوم العام (التظري) للمخروط في الهندسة يشمل سطوحا أخرى:

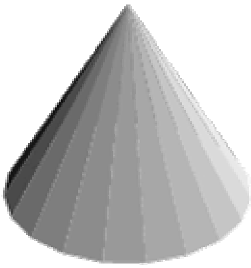
خذ مستقيما (D) واعتبر عليه نقطة مثبتة M، وخذ منحنيا مغلقا (C). ثم اجعل المستقيم (D) يدور حول نقطة مثبتة منه A بحيث تمسح النقطة M المنحني (C). إن السطح المحصل عليه بهذه الطريقة يسمى مخروطا مولدا بالمستقيم (D)، رأسه A. المخروط المحصل عليه عندئذ يكون من الشكل



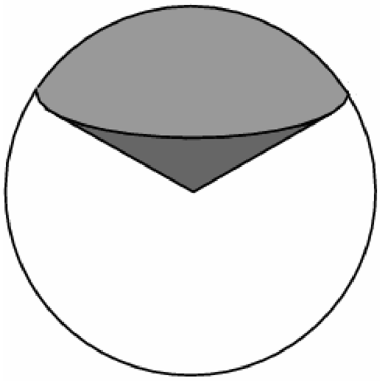
ذلك هو المخروط الذي نعتبره مثلا عندما يتعلق الأمر بالقطوع المخروطية للحصول بوجه خاص على القطع الزائد. لكننا غالبا ما نعني بالمخروط نصف هذا السطح غير المحدود كما هو موضح أدناه :



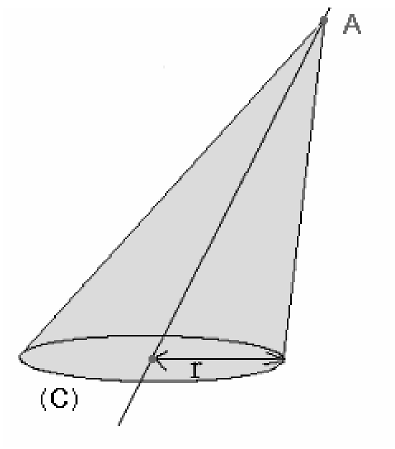
بل نكتفي في أغلب الأحيان (كما قدمنا في تعريف المخروط الدوراني) بمخروط محدود من جهة قاعدته كما هو مبيّن في الشكل التالي :



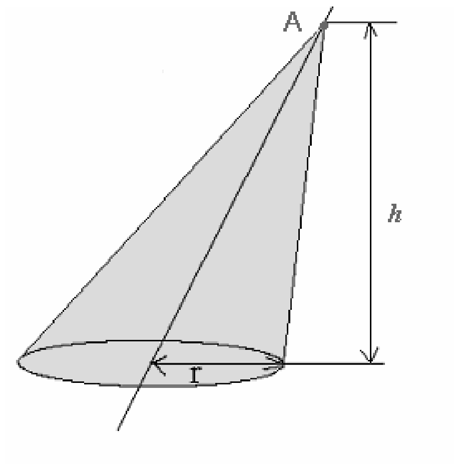
وهناك أنواع كثيرة من المخروطات منها تلك المسماة بالمخروطات الكروية التي يكون رأسها في مركز كرة وقاعدها جزءا من سطح الكرة كما هو مبيّن في الشكل أدناه :



2) يمكن – خلافا لما اعتبرناه في التعريف – أن يكون المخروط غير دوراني، كأن يكون المنحنى (C) المعتبر في الملاحظة السابقة دائرة نصف قطرها r ... لكن مسقط رأس المخروط A على مستوي القاعدة ليس مركز الدائرة (C) :

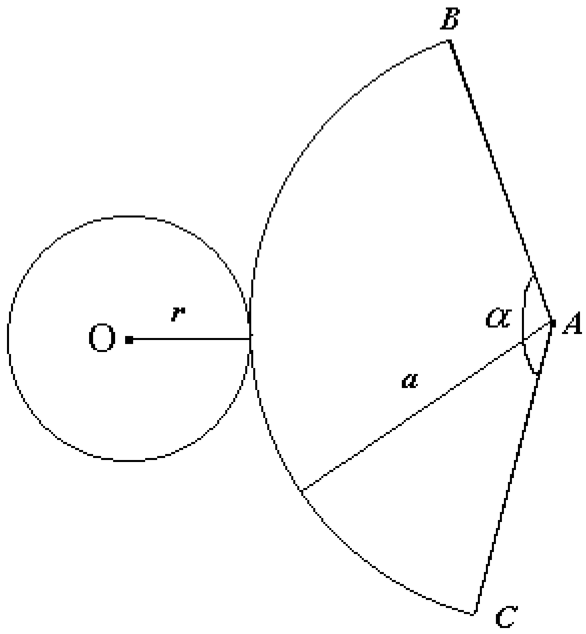


نلاحظ أن الارتفاع في هذه الحالة هو المسافة h التي تفصل الرأس عن مستوي القاعدة :



2. مساحة المخروط

نعتبر مخروطا دورانيا تصميمه من الشكل



رأسه A وقاعدته قرص نصف قطره r وطول المسافة الفاصلة بين الرأس ونقطة من نقاط حافة القاعدة يساوي a. إن المساحة الجانبية S للمخروط هو مساحة المثلث المنحني $\widehat{ABC}$، أي جزء القرص الذي مركزه A ونصف قطره a وزاويته α. لنحسب S :

من أجل ذلك نلاحظ أن الطول L للقوس BC هو محيط الدائرة ذات نصف القطر r. ولذا يمكن حساب طول هذا القوس بطريقتين، فهو يساوي :

$L = 2\pi r$ (محيط الدائرة ذات نصف القطر r)

ويساوي أيضا : $L = 2\pi a \dfrac{\alpha}{2\pi} = a.\alpha$.

ومنه ينتج : $a.\alpha = 2\pi r$.

وبالتالي فإن قيمة α بدلالة r و a هي : $\alpha = \dfrac{2\pi r}{a}$.

ماذا تساوي المساحة S؟ بما أنها تساوي مساحة جزء القرص الذي مركزه A ونصف قطره a وزاويته α فإن $S = \pi a^2 \dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{a^2\alpha}{2}$.

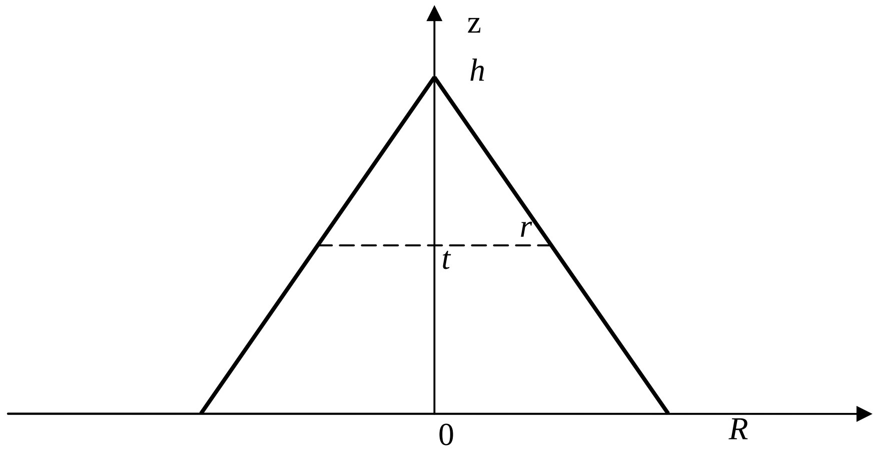
وبما أن $\alpha = \dfrac{2\pi r}{a}$ فإن :

$$S = \frac{a^2\alpha}{2} = \frac{a^2}{2}\frac{2\pi r}{a} = \pi a r \ .$$

وإن بحثنا عن المساحة الكلية فعلينا أن نضيف إلى المساحة السابقة مساحة القاعدة، أي أن المساحة الكلية هي : $\pi a r + \pi r^2$.

3. حجم المخروط

نعتبر مخروطا دورانيا نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h كما هو مبيّن في الشكل الموالي (الممثل لمقطع مخروط) :



لنحسب أولا r بدلالة h ، t ، R. لدينا العلاقة (نظرية طالس) :
$\frac{R}{h} = \frac{r}{h-t}$. ومنه $r = \frac{R}{h}(h-t)$.

يمكن حساب الحجم V للمخروط حسب العلاقة التالية :

$$V = \int_0^h V_t dt$$

حيث يمثل V_t مساحة القرص المحصل عليه في تقاطع المخروط مع مستو يوازي القاعدة ويقطع المحور عند النقطة التي تميّزها الإحداثية t. مساحة هذا القرص هي :

$$\begin{aligned} V_t &= \pi r^2 \\ &= \pi\left(\frac{R}{h}(h-t)\right)^2 \\ &= \pi R^2 - 2\pi R^2 \frac{t}{h} + \pi \frac{R^2 t^2}{h^2}. \end{aligned}$$

ولذلك تكتب العلاقة $V = \int_0^h V_t dt$ على الشكل :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h V_t\,dt \\ &= \int_0^h \left(\pi R^2 - 2\pi R^2 \frac{t}{h} + \pi \frac{R^2 t^2}{h^2} \right) dt \\ &= \int_0^h \pi R^2 dt - \int_0^h \frac{2\pi R^2}{h} t dt + \int_0^h \pi \frac{R^2 t^2}{h^2} dt \\ &= \pi R^2 h - \frac{2\pi R^2}{h} \int_0^h t dt + \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h t^2 dt \\ &= \pi R^2 h - \pi R^2 h + \pi \frac{R^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} \\ &= \frac{\pi R^2 h}{3}. \end{aligned}$$

وبالتالي فحجم مخروط نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h هو $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$.

4. حجم الأسطوانة

إذا كان h هو ارتفاع هذه الأسطوانة الدورانية، وكان r نصف قطر قاعدتها فإن العلاقة التي تعطي الحجم V (باستخدام التكامل) تتمثل في مكاملة مساحة مقطع من الأسطوانة – نحصل عليه كتقاطع مستو عمودي على محور الأسطوانة مع مجسم الأسطوانة – ونجعل متغيّر المكاملة يمسح القطعة المستقيمة $[0,h]$.

لاحظ أن هذا المقطع هو قرص ثابت المساحة ومساحته هي مساحة قاعدة الأسطوانة. ولذلك فعملية المكاملة المذكورة تعطي مباشرة :

$$V = \int_0^h \pi r^2 dz = \pi r^2 h .$$

ملاحظة :

نلاحظ عند مقارنة حجم مخروط نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h بحجم أسطوانة نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها h أن حجم المخروط يساوي ثلث حجم الإسطوانة.

يعني ذلك أننا نستطيع "وضع" 3 مخروطات داخل إسطوانة إن كان لها نفس الارتفاع ونفس نصف القطر... في حين أن مساحة مستطيل تساوي نصف مساحة المثلث الذي يكون ارتفاعه عرض المستطيل وقاعدته طول ذلك المستطيل ! ألا يرجع ذلك إلى الانتقال من المستوي إلى الفضاء ... الانتقال من البعد 2 إلى البعد 3؟

5. حجم الكرة :

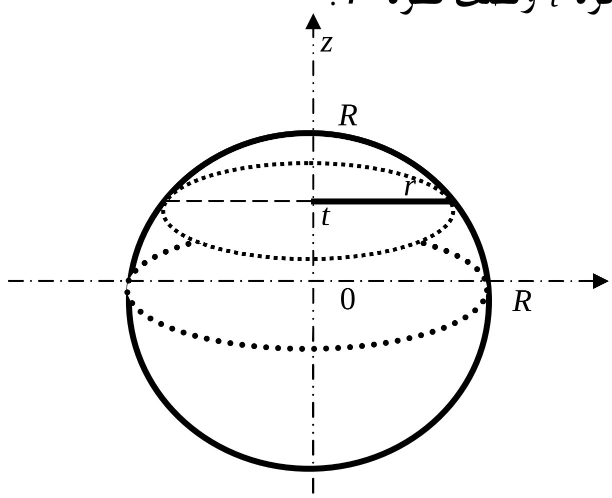
هناك خاصية مهمة للكرة : يمثل سطح الكرة أصغر مساحة ممكنة من بين السطوح التي تحيط بحجم معطى.

بمعنى أنه إذا أعطي حجم وطلب وضعه داخل إناء وأردنا أن يكون سطح الإناء أصغريا فلا بد أن نختار الإناء كروي الشكل.

كما أن الكرة تحتوي على أكبر حجم ممكن من بين السطوح التي لها مساحة معطاة. بمعنى أنه إذا أعطي سطح مساحته معلومة وأردنا أن نعطي له شكلا يجعله يحتوي على أكبر حجم ممكن فلا بد أن نجعله يأخذ شكل كرة.

هذه الخاصية هي التي تجعل فقعات الصابون وقطرات الماء – عندما نهمل تأثير الجاذبية – تأخذ أشكالا كروية ذلك أن الضغط السطحي يسعى دوما إلى تصغير المساحة.

نعتبر كرة نصف قطرها R ونرسم الشكل الموالي، ونحسب الحجم V للكرة بطريقة مماثلة لتلك التي اتبعناها في حساب حجم المخروط. من أجل ذلك نقطع الكرة بمستو عمودي على المحور (Oz) فيقطع هذا المحور عند النقطة t. ويكون تقاطع الكرة مع المستوي قرصا مركزه t ونصف قطره r.



كم يساوي r بدلالة R و t؟ بتطبيق نظرية فيثاغورس نحصل على العلاقة : $r^2 + t^2 = R^2$. ومنه $r^2 = R^2 - t^2$. يعبر التكامل التالي عن حجم نصف الكرة

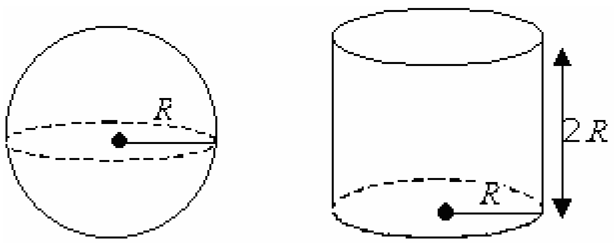
$$\int_0^R \pi r^2 dt = \int_0^R \pi\left(R^2 - t^2\right) dt$$

ومنه فإن حجم الكرة هو :

$$V = 2\int_0^R \pi\left(R^2 - t^2\right)dt$$
$$= 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3}$$
$$= \frac{4\pi R^3}{3}.$$

ملاحظة :

كان أرخميدس قد بيّن أن مساحة سطح كرة تساوي المساحة الجانبية للأسطوانة التي قطر قاعدتها يساوي قطر الكرة وارتفاعها يساوي أيضا قطر الكرة.



المساحة الجانبية لهذه الأسطوانة = مساحة سطح هذه الكرة.

ولذلك نستنتج مما قاله أرخميدس أن مساحة سطح كرة نصف قطرها R هو $4\pi R^2$.

6. جدول المساحات

نقدّم في الجدول التالي مساحات بعض الأشكال الهندسية في الفضاء:

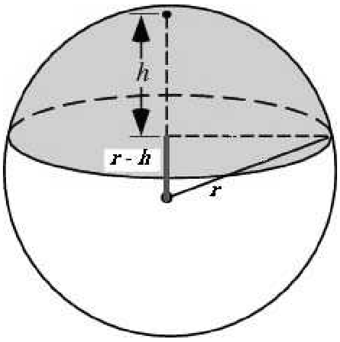
الشكل	المساحة
مكعب طول ضلعه a	$6a^2$
متوازي المستطيلات أبعاده a ، b، c	$2ab+2bc+2ac$
أسطوانة دورانية نصف قطر قاعدها R وارتفاعها h	المساحة الجانبية : $2\pi R.h$ المساحة الكلية : $2\pi R.h+2\pi R^2$
مخروط نصف قطر قاعدها R وارتفاعها h	المساحة الجانبية : $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ المساحة الكلية : $\pi r\sqrt{r^2+h^2}+\pi r^2$
كرة نصف قطرها R	$4\pi R^2$

7. جدول الحجوم

نقدم في الجدول التالي قائمة توضح حجوم أهم الأشكال الهندسية في الفضاء :

الشكل	الحجم
مكعب طول ضلعه a	a^3
متوازي المستطيلات أبعاده a ، b ، c	$a.b.c$
متوازي وجوه	مساحة قاعدته في ارتفاعه
أسطوانة دورانية نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها h	$\pi R^2.h$
أسطوانة	مساحة قاعدتها في ارتفاعها
مخروط نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها h	$\dfrac{\pi R^2.h}{3}$
الهرم	ثلث جداء مساحة قاعدته في ارتفاعه
كرة نصف قطرها R	$\dfrac{4\pi R^3}{3}$
مجسم ناقصي أنصاف محاوره a ، b ، c	$\dfrac{4\pi}{3}a.b.c$
جذع مخروط ارتفاعه h ونصفا قطري قاعدتاه R و R'	$\dfrac{\pi h}{3}\left(R^2+R'^2+RR'\right)$
جذع كرة ارتفاعه h ونصفا قطري قاعدتاه R و R'	$\dfrac{\pi h}{6}\left(3R^2+3R'^2+h^2\right)$

قبة كرة ارتفاعها h ونصف قطر الكرة h $\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$



القاعدة العامة لحساب حجم مجسم

لحساب حجم أي مجسم نستخدم العلاقة $\int A(t)dt$ التي تعبر عن الحجم المطلوب حيث :

1) $A(t)$ هي مساحة مقطع المجسم العمودي على "المحور" الذي ينتمي إليه t،

2) t تمسح "الارتفاع".

بعض المراجع :

1. زيتوني ل. : دروس موجهة لتكوين أساتذة التعليم المتوسط، الرياضيات (بيولوجيا)، الإرسال الأول، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، 2006.

2. سعد الله أ.خ. : دروس موجهة لتكوين أساتذة التعليم المتوسط، التحليل 1 (رياضيات وتكنولوجيا)، الإرسال الأول، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، 2006.

3. سعد الله أ.خ. : دروس موجهة لتحسين مستوى أساتذة التعليم الثانوي، المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم، الحراش، الجزائر، 2004.

4. **Allab K.** : Eléments d'analyse, O.P.U., Alger, 1980.
(مترجم إلى العربية من قبل أب. خ. سعد الله عن ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر)

5. **Couty R. Ezra J**. : Analyse, Armand Colin, Paris, 1967.
(مترجم إلى العربية من قبل يوسف عتيق عن ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر)

6. **Medjadi D.E., Boukra M., Djadane A., Sadallah B.-K**. : Analyse mathématique , Tome 1, O.P.U., Alger 1994.

7. **Dieudonné J**. : Calcul infinitésimal , Hermann, Paris, 1980.

8. **Kolmogorov**, **Fomine** : Éléments de la théorie des fonctions et de l’analyse fonctionnelle, Ed. Mir, 1976
(مترجم إلى العربية من قبل أ. خ. سعد الله عن ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر)

II

الجبـــر

عناوين الدرس

تقديم:

كُتِب هذا الدرس في الجبر وفق البرنامج المسطر من طرف وزارة التربية الوطنية الهادف إلى تكوين مفتشي التعليم المتوسط في مادة الرياضيات. وقد ارتأينا تقسيم هذا البرنامج إلى ثلاث وحدات، هي :

1) المنطق والعلاقات،
2) البنى الجبرية،
3) مجموعات الأعداد.

ولم نهتم بالجانب التدريبي (التمارين) إلا في مواقع قليلة، وأغفلنا هذا الموضوع، سيما في دراسة مجموعات الأعداد حيث ركزنا على مفهوم الإنشاء.

ثم إن البرنامج يشير إلى المدة المخصصة لمادة الجبر فيحددها بـــ 48 ساعة ! وهي مدة لا تسمح بالتطرق لكل المواضيع المقررة بالتفصيل، ولذلك لا بد من تخصيص البعض منها (سيما في فصل مجموعات الأعداد) كمحاور للبحوث يقدمها الطلبة المفتشون خلال السنة الدراسية.

نتمنى أن يكون هذا الدرس مفيدا للطالب المفتش.

أبو بكر خالد سعد الله
قسم الرياضيات
المدرسة العليا للأساتذة، القبة، الجزائر

الفصل الأول

المنطق والعلاقات

مقدمة:

يشير البرنامج المسطر في فصل المنطق والعلاقات إلى أن الأمر يتعلق بموضوع يلّم به الطالب المفتش. وعليه فالمطلوب هو زيادة ترسيخ المفاهيم. ومن هذا المنظور فقد اكتفينا بالتذكير بأبرز التعاريف في المنطق (القضية، الروابط، ...) وأدمجنا نصا نقديا مطولا لخّص آراء رياضيين غير مألوفة في الرياضيات، لا شك أن القارئ سيجد فيه بعض الغرابة. ومع ذلك نرى أنه من المفيد أن يتأمل فيه الطالب المفتش ليتعرف على حدود المنطق ومدى دقة الرياضيات. كما أشرنا لبعض أنماط البرهان، وهي أيضا معروفة لدى القارئ.

ولم نتوسّع في موضوع العلاقات حيث قدمنا بإيجاز، مع بعض الأمثلة، علاقتي التكافؤ والترتيب. ولا شك أن المدرّس سيتمكّن من تقديم عدة مواضيع لم نتطرق إليها هنا كمواضيع للدراسة خلال السنة الدراسية. ومن تلك المواضيع يمكن اقتراح نظرية المجموعات، وخواص التطبيقات، والتعمق في موضوع المنطق الرياضي، ومواضيع أخرى كثيرة.

1. المنطق :

1.1 تعاريف :

تعريف (القضية)

نسمي قضية كل عبارة تحتمل الصحة أو الخطأ.

أمثلة

1) **"العبارة** $5 < 8$**" قضية، وهي قضية خاطئة.**

2) **"الرباط عاصمة المغرب" قضية، وهي قضية صحيحة.**

3) " $\exists x : x^2 = y$ " **عبارة لا تمّثل قضية لأننا لا نستطيع البت في صحتها أو خطئها ما لم نُزَوَّد بتوضيحات إضافية حول العنصرين** x **و** y.

ملاحظة

لاحظ أن بعض القضايا في الرياضيات تضم متغيرات، وينبغي الحصول على معلومات إضافية للبت في صحتها.

تعريف (نفي القضية)

نفي قضية P هي القضية التي تكون صحيحة عندما تكون P خاطئة، وتكون خاطئة عندما تكون P صحيحة.

نرمز غالبا لنفي القضية P بــ $\overline{P}$.

مثال:

1) **نفي القضية "الرباط عاصمة المغرب" هي " الرباط ليست عاصمة المغرب".**

2) **نعتبر في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ القضية P المتمثلة في الخاصية "$x \in \mathbb{R},\ x \le 2$". عندئذ يكون نفي هذه القضية "$x \in \mathbb{R},\ x > 2$".**

3) **نمثّل عادة العلاقة بين قضية ونفيها بجدول كما يلي، حيث يرمز 1 لصحة القضايا و 0 لخطئها :**

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

تعريف (الوصل)

لتكن P و Q قضيتين. وصل القضيتين P و Q هو القضية، ذات الرمز $P \wedge Q$، التي تكون صحيحة إذا وفقط كانت كل من P و Q صحيحة.

إذا كان وصل القضيتين P و Q خاطئا قلنا إن P و Q متناقضتان (أو غير منسجمتين).

ملاحظة

نلاحظ أن التعريف السابقة يؤدي إلى أن قضية الوصل $P \wedge Q$ خاطئة في كل حالة من الحالات التالية :

1) **إذا كانت P خاطئة.**
2) **إذا كانت Q خاطئة.**
3) **إذا كانت كلّ من P و Q خاطئة.**

مثال

نعتبر القضية P التالية : $x \in \mathbb{Q},\ \ x \geq \frac{1}{2}$، والقضية Q التالية $x \in \mathbb{Q},\ \ x \leq \frac{1}{2}$. عندئذ تكون قضية الوصل $P \wedge Q$ هي $x \in \mathbb{Q},\ \ x = \frac{1}{2}$.

تعريف (الفصل)

لتكن P و Q قضيتين. فصل القضيتين P و Q هو القضية، ذات الرمز $P \vee Q$، التي تكون صحيحة إذا إحدى القضيتين P و Q أو كلاهما.

ملاحظة

نلاحظ أن التعريف السابق يؤدي إلى أن قضية الفصل $P \vee Q$ خاطئة إذا كانت كلّ من القضيتين P و Q خاطئة.

مثال

نعتبر القضية P التالية : "$x \in \mathbb{Q},\quad x > \frac{1}{2}$"، والقضية Q التالية "$x \in \mathbb{Q},\quad x < \frac{1}{2}$". عندئذ تكون قضية الفصل $P \vee Q$ هي $x \in \mathbb{Q},\quad x \neq \frac{1}{2}$.

تعريف (الاستلزام)

لتكن P و Q قضيتين. نرمز للقضية $\overline{P} \vee Q$ بـــ $P \Rightarrow Q$، ونسميها استلزاما ونقرأها P تستلزم Q.

ملاحظات

1) **نجد في بعض الكتب لفظ "يقتضي" بدل "يستلزم".**
2) **لاحظ أن الاستلزام "علاقة" متعدية، بمعنى أن**
$$\big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

3) لاحظ أن من مآخذ الاستلزام أنه يسمح بكتابة $1=2 \Rightarrow 2=3$ "دون حياء" إذ أن $\overline{P} \vee Q$ تعني هنا أن المطلوب هو صحة إحدى القضيتين $1 \neq 2$ أو $2=3$. ولما كانت القضية $1 \neq 2$ صحيحة فإن $1=2 \Rightarrow 2=3$! نعبر عن ذلك أحيانا بالقول إن "الخاطئ يستلزم الخاطئ" (كما يستلزم الصحيح أيضا) ... خلافا لـــ "الصحيح" فهو لا يستلزم إلا "الصحيح".

لرؤية ذلك افترض أن P صحيحة. حينئذ تكون $\overline{P}$ خاطئة. وعليه إذا افترضنا أن "$P \Rightarrow Q$" صحيح، أي أن القضية $\overline{P} \vee Q$ صحيحة (علما أن $\overline{P}$ خاطئة) فلا بد أن تكون Q صحيحة. خلاصة القول إن الانطلاق من صحة P يؤدي حتما إلى صحة Q.

ومن جهة أخرى نلاحظ أن هناك جانبا شكليا (صوريا) واضحا في مسألة "الاستلزام" : إذا كانت القضية P تعني أن "القاهرة عاصمة مصر" والقضية Q تعني "$3=3$" فمن الواضح أن $P \Rightarrow Q$ لأن $\overline{P} \vee Q$ صحيحة رغم أن موقع القاهرة لا علاقة له بالعدد 3.

كما أننا لو نعتبر القضية R القائلة "القاهرة عاصمة بيروت" وكانت S أية قضية فسنجد أن $R \Rightarrow S$ لأن $\overline{R} \vee S$ صحيحة... من حسن الحظ أننا لا نستعمل المنطق الرياضي في هذا السياق العبثي !

تعريف (التكافؤ)

لتكن P و Q قضيتين. نقول إن P و Q متكافئتان إذا كانت P تستلزم Q و Q تستلزم P.   الكتابة $P \Leftrightarrow Q$ هي الرمز المعبِّر عن تكافؤ القضيتين P و Q.

ملاحظة

1) نلاحظ أن تكافؤ قضيتين يعني أنهما صحيحتان معا أو خاطئتان معا، ولا يمكن أن تصح أحدهما دون الأخرى.

2) لدينا $P \Leftrightarrow \left(\overline{\overline{P}}\right)$ من أجل كل قضية P، أي أن نفي نفي قضية يكافئ تلك القضية.

3) لاحظ أن التكافؤ "علاقة" متعدية، بمعنى أن

$$\left((P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)\right) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R).$$

4) لدينا : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$ من أجل قضيتين P و Q.

إليك الجدول الحقيقة التالي الذي يلخص ما ورد أعلاه،

من أجل قضيتين P و Q :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

مثال

1) **باستعمال جدول الحقيقة، نثبت أن** $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$:

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2) **باستعمال جدول الحقيقة نثبت أيضا أن**

$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$:

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$	$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

نظرية (توزيع الفصل والوصل)

لتكن P و Q و R ثلاث قضايا. لدينا التكافؤان التاليان :

1) **توزيع الفصل على الوصل :**

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

2) **توزيع الوصل على الفصل :**

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

البرهان : متروك للقارئ.

تمرين 1

لتكن P و Q قضيتين. نعرّف رابطة "الفصل الإقصائي" التي نرمز لها بـــ ρ، كما يلي:

تكون $P\rho Q$ إذا وفقط إذا صحت إحدى الحالتين التاليتين :

- **الحالة الأولى: P صحيحة و Q خاطئة،**
- **الحالة الثانية: P خاطئة و Q صحيحة.**

1) **اكتب جدول الحقيقة لـــ "ρ".**

2) **نعتبر ثلاث قضايا P، Q، R. أثبت أن:**

أ) $P\rho\,(Q\,\rho R) \;\Leftrightarrow\; (P\rho Q)\,\rho R$.

ب) $P \wedge (Q\rho R) \;\Leftrightarrow\; (P \wedge Q)\rho\;(P \wedge R)$.

2.1 هشاشة المنطق الرياضي:

ليس هناك تعريف رياضي دقيق للبرهان، لكننا نستطيع وصفه بأنه استدلال يسمح بتوضيح صحة قضية، أو قضايا، انطلاقا من خواص وقضايا مثبتة أو مسلّم بها. ويمكن بعد ذلك ضم القضية التي تم توضيحها إلى الفرضيات ومواصلة الاستدلال من أجل إثبات قضايا أخرى. وفي كل الأحوال، فالبرهان مبني على المنطق الرياضي، ولذا لا يمكن "الطعن فيه" إن لم يكن به خلل منطقي. لكنه من الجائز الطعن في الفرضيات التي ننطلق منها لأداء البرهان.

والواقع أن البرهان الذي نقدمه في إطار دروسنا ليس عموما مفصلا إلى حدّ يمكن أن نصفه بأنه "صحيح" بالمفهوم المنطقي. إذ نكتفي في أغلب الأحيان بتقديم عناصر يتقبّلها المستمع أو المتتبع للبرهان وتقنعه بصحة القضية المراد إثباتها. وعليه يمكن القول أن "البرهان" أمر نسبي.

نودّ في هذا المقام التأكيد على جانب "النسبية" في مفهوم المنطق والدقة. ولذا ارتأينا تلخيص فيما يلي – بتصرف – أوجه نظر غير مألوفة حول السبل المتبعة في الرياضيات وسلوكات

أهلها. وقد اعتمدنا في ذلك بوجه خاص عما جاء في كتاب أستاذ الرياضيات الفرنسي نوردون

Nordon D. : Deux et deux font-ils quatre ? Sur la fragilité des mathématiques, Pour la Science, Paris, 1999.

وكتابي أستاذي الرياضيات الأمريكيين ديفس وهارش

Davis P. J, Herch R. : The Mathematical experience, Birkhauser, Boston 1982 .
Davis P. J, Herch R. : Descartes' Dream, The world according to mathematics, Harcourt, Brace Jovanovich Inc., Orlando, 1986.

هناك وسيلة ناجعة تسمح لنا بالصمود أمام زخم المعارف : علينا أن نقتنع بأننا ملمون بقسط من المعارف يكفينا لإبداء الرأي والحكم على الأشياء وتوجيه النقد. والنقد لا يعني الإساءة بل يعني الإسهام في ردّ الأمور إلى نصابها بتأكيد نسبية الأشياء ... فلا إفراط ولا تفريط.

إذا طبقنا هذا المبدأ على الرياضيات فلا بد أن نطرح جملة من الإشكاليات : ماذا تعني الرياضيات بالنسبة لأصحابها؟ وما قيمتها لديهم؟ ما هي الإضاءة التي تقدمها؟ وعماذا تنعكس تلك الإضاءة؟ هل تشوّه الرياضيات نظرة الإنسان للأشياء؟ والأسئلة من هذا القبيل كثيرة ومتنوعة، لكن الإجابة عنها ستختلف

باختلاف المجيبين، إذ لا نتصور أن إجابة الباحث في الرياضيات ستكون مطابقة لإجابة تلميذ في التعليم الثانوي في عجلة من أمره لإزالة حاجز الرياضيات من طريقه.

يرى بعض الرياضيين أن أحسن استراتيجية للتأمل في الرياضيات هي أن تستخدم كل المقاربات في آن واحد حتى لو كانت متناقضة : نعتبر أن كلها مقاربات جيدة لأن ليس منها ما هو أفضل من غيرها! إن الرياضيات معقدة ومتعددة الأوجه وكذلك حال وسط أهلها. ومن ثم فالصورة الوفية للرياضيات لا بد أن تكون متعددة أيضا. وعلى كل حال فلا يمكننا استنباط أثرَى الحقائق وأصدقها إذا ما انغمسنا بدون انقطاع في نفس الاتجاه.

إن المزج بين المقاربات منهجية جيدة لأنها لا توهمنا بأنها جيدة! وفي مطلق الأحوال فإن الرغبة في فهم الرياضيات رغبة لا يمكن تلبيتها لأن الرياضيات انشطرت إلى آلاف الاختصاصات والتفرعات، وكل فرع منها يتطلب مدة تعادل حياة الفرد للتحكم في زمامها.

ويوضح بعض هؤلاء الرياضيين موقفهم فيعلنون أن هناك غلوًا في القول بأن للرياضيات مزايا من شأنها أن تساعد الفرد على اكتساب قدرات فكرية : المنطق السليم والحجة الدامغة والقدرة على التجريد واكتساب الفكر الناقد. ولذا ينبغي إعادة النظر في العديد من الأحكام والآراء بخصوص الرياضيات وشأنها في المجتمع ويقتضي الأمر أن يقدّم الرياضيون بعض التنازلات منها:

– قبول الفكرة القائلة بأن للرياضيات معنى آخر يختلف عن ذلك الذي يعطيه لها الرياضيون.

– التسليم بأن النظريات التي يتغنون ببراهينها وصدق نتائجها هي نظرية تحمل نصيبا من النسبية، ومن ثم فهي قابلة للنقاش.

– التسليم بأن رأي رجل الشارع ليس أقل شرعية من رأي الرياضي.

– ينبغي التخلي عن فكرة "اليقين" التي لا زالت تحيط بالرياضيات.

ويواصل الناقدون بالتأكيد على أنه ينبغي أن يدرك الرياضيون بأن طبيعة المعرفة المكتسبة من قبل الفرد أقل أهمية من مواقفه الفكرية : يجب الخيار بين الانغلاق والتشدّد والسيطرة وبين الانفتاح والمرونة والإنصات إلى الآخرين. إن النقاش فعل ثقافي متميز وبالغ الأهمية لأنه يعني قبول الآخر وقبول تأثيراته حتى

لو كنا نحن المختصين وكان هو من غير المختصين. ومن ناحية أخرى فالإيمان بهشاشتنا وهشاشة علمنا يدفع عنا الميول إلى الانغلاق الفكري. فلماذا نخشى من هشاشة الرياضيات؟

إن من يعرف الرياضيات عن كثب يعلم أن البرهان لا يؤدي فيها الدور الأساسي إذ ليس من الصعب إقحام الرياضيين في متاهات منطقية حول ما أثبتوه من نتائج وجرّهم إلى وضعيات يعجزون فيها عن الإتيان بالتبارير والحجج المقنعة. ويعرف هؤلاء الرياضيون أيضا أن الجمال له مكانة مرموقة في الرياضيات، سيما البحتة، والكل يعلم أن الجمال قضية لا تثبت ولا تبرهن. وعليه يمكننا أن نجعل الرياضيات محل نقاش مثلما نناقش الأذواق والألوان. والهدف من هذا النقاش لا يرمي إلى جعل الطرف الآخر يغيّر رأيه بل يرمي إلى إدراك الثراء الذي تحمله أوجه النظر المختلفة.

هل سبق لك أن تساءلت عن معنى كلمة "برهان" سيما في الرياضيات ؟ وهل توصلت إلى تعريف دقيق لهذا المعنى؟ ألم تقل يوما إن " البرهان هو توضيح وشرح الحقيقة بشكل بديهي سليم"؟ أو إنه " تبيان حقيقة بحجج مقنعة لا غبار عليها وغير قابلة للنقاش" ؟ أتظنّ أن تعريفا كهذا يقبله العام والخاص ؟

إذا تحدّثنا عن الرياضيات وبراهين النظريات المقدّمة خلال تدريسها فلا بد أن نعترف بأن درجة اقتناعنا بهذه البراهين تتوقف على مدى ثقتنا فيما يقوله الأستاذ المدرّس! كم من أستاذ قدّم برهانا سليما على السبّورة لكن انعدام الثقة بينه وبين تلاميذه جعلت هؤلاء يطرحون عليه وابلا من الأسئلة أربكته وأفقدته يقينه ببرهانه ... وكم من أستاذ أخفق في تقديم أحد البراهين إلا أن الثقة الكاملة في قدرة هذا الأستاذ جعلت التلاميذ يصدّقون تصديقا أعمى ما روي لهم ويحجمون عن طرح أي سؤال!

وقد تفنّن أساتذة الرياضيات في عرض براهينهم على السبّورة أمام تلاميذهم وطلابهم، وذلك بهدف تفادي المشاكل التي قد تنجرّ عن برهان كامل و"واضح"! وهكذا نجد أحدهم يقدم برهانا بمثال ... كأن يكتفي خلال عرض برهان نظرية عامة بإثبات حالة خاصة منها، ثم يقول : "لا داعي لإثبات الحالة العامة لأن العناصر الأساسية موجودة في هذه الحالة الخاصة"!

ومن هؤلاء الأساتذة من يقدّم برهانا "بالترهيب"! يحدث ذلك عندما يكتب الأستاذ على سبّورته نتيجة من النتائج ثم يقول : " هذا بديهي" أو " البرهان على هذه النتيجة تافه" أو " من المعلوم أن هذه النتيجة صحيحة" أو " الكل يعرف هذه النتيجة"!

إذا استمع التلميذ أو الطالب إلى هذه المقولة من المقولات فمن يتجرّأ، بعد ذلك، ويسأل: لماذا وكيف؟!

هناك حادثة طريفة تدعم هذا الرأي : ذات مرة كان الرياضي البريطاني الشهير غودفري هاردي Hardy (1877–1947) يلقي محاضرة أمام عدد قليل من الطلبة المتفوقين بجامعة كمبردج. فكتب هاردي على اللوح علاقة رياضية بالغة التعقيد وهو يرددّ "إنها علاقة بديهية". وفجأة انقطع عن الكلام وانغمس في تفكير عميق، وكان واضحا أن تلك العلاقة كانت موضوع تفكيره. ثم توجه في صمت الى مكتبه القريب من قاعة المحاضرات وكان الطلبة يشاهدونه في غدو ورواح داخل المكتب وهو شديد التركيز. وبعد مرور ساعتين كاملتين عاد هاردي الى القاعة وأشار الى العلاقة التي كانت لازالت مكتوبة على اللوح قائلا : "بطبيعة الحال، إنها علاقة بديهية" وواصل محاضرته دون تقديم أية شروحات إضافية ... وكأن شيئا لم يكن!

والواقع أن هناك، في كل برهان على نتيجة رياضية، لحظة صمت تأتي في لحظة حاسمة لأن إدراك البرهان يتطلب منا دائما إدراك نتيجة بديهية. لكن علينا ألا نفهم من لفظ "بديهي" السهولة والوضوح، بل يمكن التأكيد بأنه كلما زاد تجريد نظرية

كلما زاد دور "البداهة" : نحن لا نقول عن شيء ملموس ومرئي (مثل النص الذي بين يديك) إنه بديهي.

وخلافا لما هو متداول فلفظ "بديهي" في الرياضيات يستخدم عموما عندما نعجز عن تقديم المزيد من التوضيحات للمستمع؛ ولا تعني "البداهة" أن الأمر الذي نريد إثباته مرئي، وإنما نطلب بذلك من المتتبع أن يبذل المزيد من الجهد الشخصي والتفكير المركز للاقتناع بصحته ويدرك بمفرده بقية الموضوع: نحن نصمت ونتوقف عن تقديم المزيد من التوضيحات في اللحظة التي ينبغي على المستمع بذل الجهد الشخصي للاقتناع. ذلك أن خطاب الرياضيات يتميز بخاصة غريبة : إنه خطاب يقنع لحظة الكفّ عن الكلام. أليس في ذلك برهان على وجود هشاشة في الرياضيات؟ إن الرياضيات ليست بالدقة التي نتصورها وليست متينة الأساس كما يزعم الزاعمون !

وإذا عدنا إلى تعريف البرهان في الرياضيات فإننا نجده مرتبطا بالمنطق حيث أن ما يميّز الرياضيات هو رفضها لكل نتيجة لم تثبت ببرهان منطقي. ولسوء الحظ فإن الفكر المنطقي ليس فكرا سائدا لدى عامة الناس ولا يتميّز بالسهولة. وأحسن دليل على ذلك أن الكثير من معتقداتنا الشخصية لم تخضع لرقابتنا "المنطقية". ما الذي يجعلنا نؤمن مثلا بأن الأرض تدور حول نفسها وحول

الشمس؟ ألا يرجع ذلك الإيمان إلى ثقتنا في أقوال أساتذتنا وعلمائنا؟ ألم تعش البشرية زمنا طويلا وهي تؤمن إيمانا راسخا بأن الأرض ثابتة لا تدور ... بناء على أقوال علمائها آنذاك؟!

ولعل ما يزيد في توضيح الإشكالية التي تحيط بتعريف معنى "البرهان" الحوار الموالي الذي تصوّره الرياضيان ب. ج. ديفس Davis وَ ر. هارش Hersh. يدور هذا الحوار الطريف بين أستاذ مثالي لمادة الرياضيات وطالب في قسم الفلسفة:

الطالب: سيدي، ما هو "البرهان"؟

الأستاذ: ألا تعرف ذلك؟ في أية سنة تدرس؟

الطالب: في السنة الثالثة.

الأستاذ: هذا لا يصدّق! البرهان هو ما رأيتني أقوم به أمامك على السبّورة ثلاث مرات أسبوعيا خلال ثلاث سنوات! ... ذلك هو البرهان.

الطالب: آسف سيدي. عليّ أن أوضح بأني أدرس الفلسفة وليس الرياضيات ... ولم يسبق لي أن حضرت دروسكم.

الأستاذ: لا بأس! في هذه الحالة، لا بد أنك درست قليلا من الرياضيات، أليس كذلك؟ ألا تعرف برهان النظرية الأساسية في التحليل أو برهان النظرية الأساسية في الجبر؟

الطالب: أطلعت على استدلالات في الهندسة والجبر والتحليل كانت تسمى براهين. لكن ما أطلبه منكم ليس أمثلة لبراهين بل أودّ تعريفا لمفهوم "البرهان" ... وإلا كيف يمكنني الاقتناع بأن هذه الأمثلة صحيحة؟

الأستاذ: نعم. كانت هذه القضية قد هيكلها العالِم المنطقي ألفرد تارسكي Tarski (1902–1983) حسب علمي، وشاركه في ذلك آخرون مثل برترند روسل Russel (1872–1970) وجيوزيبي بيانو Peano (1858–1932) ... هذا ليس مهمّا. إن ما ينبغي أن نقوم به هو التعبير عن مسلّمات (بديهيات) نظريتك بلغة شكلية (صورية) وذلك باستخدام قائمة معيّنة من الرموز والحروف. وبعد ذلك تكتب فرضيات القضية التي تريد البرهان عليها باستعمال الرموز المشار إليها آنفا. عندئذ، تثبت أنك تستطيع التحوّل خطوة خطوة بفرضياتك (بفضل قواعد المنطق) إلى أن تصل إلى النتيجة المطلوبة. ذلك ما يسمى برهانا ! أفهمت؟

الطالب: أهذا كل ما في الأمر؟ عجيب! لقد تعلّمت التحليل الأولي والعالي والجبر العام والطبولوجيا ... لكني لم أر أبدا ما ذكرتم لي الآن.

الأستاذ: بطبيعة الحال، فليس هناك من يقوم بكـــل هذا من أوّله إلى آخره ... ذلك يتطلب وقتا طويلا. عليك فقــط أن تثبت بأنك قادر على القيام به ... هذا يكفي!

الطالب: هذا أيضا لا يشبه ما يوجد في دروسي وفي كتبي ... الواقع أن الرياضيين لا يقدّمون براهين!

الأستاذ: كيف؟! إننا نقـــدّم بـــراهين، وإذا لم يـــتم البرهان على نظرية فهي لا تساوي شيئا.

الطالب: إذن، ما البرهان؟ إذا كان البرهان هو لغـــة شكلية وقوانين تحويل فلا يمكن لأيّ كان أن يبرهن على شيء. هل ينبغي معرفة كل شيء حول اللغات الشكلية والمنطـــق الـــشكلي (الصوري) قبل الإقبال على تقديم برهان رياضي؟

الأستاذ: طبعا، لا! فبقدر ما يزداد جهلـــك بهـــذه الأمور بقدر ما يكون ذلك في صالحك! وعلى كل حـــال، فهـــي عبارة عن حيل مجرّدة غير ملموسة.

الطالب: إن كان الأمر كـــذلك ... فمـــا البرهـــان بالضبط؟!

الأستاذ: آه ... البرهان هو استدلال يقنع أيّ شخص ملمّ بالموضوع!

الطالب: "أيّ شخص ملمّ بالموضوع"! هذا يعـــني أن تعريف البرهان تعريف نسبي ... فهو متعلّق بالأشخاص المهـــتمين

بالموضوع. وهكذا، قبل أن نثبت فيما إذا كان أمر ما برهانا أم لا، لا بد أن نقرّر من سيكون الحكَم! ما علاقة هذا الكلام بالبرهان على نظرية؟!

الأستاذ: لقد ابتعدتَ كثيرا عن الموضوع! ليست هناك نسبية فيما قلته لك ... فكل الناس يعرفون ما هو البرهان ... اقرأ فقط بعض الكتب وتابع دروس رياضي كفء وستفهم!

الطالب: أأنتم متأكدون مما تقولون؟

الأستاذ: آه ... من الممكن أن لا تفهم إن لم تكن موهوبا!... فهذه الحالة تحدث أحيانا.

الطالب: خلاصة قولكم أنكم تقرّرون – أنتم – ما هو البرهان؛ وإذا لم أتعلّم أنا كيف أقرّر وأحكم وفق طريقتكم فأنتم تقرّرون أني لست موهوبا!

الأستاذ: إذا لم أقم أنا بذلك فمن عساه يؤدي هذا الدور؟!

3.1 أنماط البرهان :

نجد في الرياضيات عدة أنماط من البراهين. لنذكر بعضها :

– هناك ما يسمى بالبرهان المباشر الذي يعتمد على خاصية الاستنتاج المنطقي. ويتمثل ذلك في المبدأ التالي : إذا

كانت القضية P صحيحة و $P \Rightarrow Q$ (أي P يستلزم Q)
فإن Q صحيحة.

– وهناك البرهان بالخلف (برهان غير مباشر)، وهي طريقة تتمثل في إثبات استحالة قيام نفي القضية التي نريد البرهان على صحتها. وهنا نفرض أن القضية Q المراد إثباتها خاطئة ثم نبرهن عندئذ أن القضية P الواردة في الفرضيات خاطئة. وبذلك ينتهي البرهان. كل ذلك يعتمد على صحة التكافؤ التالي الذي أشرنا إليه آنفا : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$. فلكي نثبت $P \Rightarrow Q$ يكفي (ويلزم) أن نثبت $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

– وهناك البرهان بفصل الحالات : يقوم مبدؤه على الملاحظة التالية:

> إذا كانت P و Q و R ثلاث قضايا تحقق الشروط الثلاثة التالية :
>
> 1) $P \vee Q$ صحيحة،
>
> 2) $P \Rightarrow R$ صحيحة،
>
> 3) $Q \Rightarrow R$ صحيحة.
>
> عندئذ تكون القضية R صحيحة.

ملاحظة

من الناحية العملية نعتبر عموما في هذا النمط $Q = \overline{P}$ فيتحقق على الدوام الشرط الأول لأن $P \vee \overline{P}$ صحيحة دوما.

– هناك البرهان بالمثال المضاد الذي نلجأ إليه في الحالة التالية: إذا كانت لدينا خاصية $P(\lambda)$ متعلقة بوسيط λ ينتمي إلى مجموعة A وكان السؤال : هل $P(\lambda)$ صحيحة مهما كان $\lambda \in A$؟ فإذا أردنا الجواب بالنفي فما علينا سوى أن نجد قيمة واحدة للوسيط λ_0 بحيث تكون $P(\lambda_0)$ خاطئة. يعتبر البحث عن قيمة للوسيط λ_0 بحثا عن مثال مضاد يفند صحة $P(\lambda)$ مهما كان $\lambda \in A$.

– وهناك البرهان بالتراجع (أو بالتدريج) : نستخدم هذا النوع من الاستدلال عموما إذا كانت القضية المراد إثباتها تتعلق بوسيط طبيعي. ويقوم البرهان بالتراجع على المبدأ التالي :

أ) لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ تحقق الشرطين :

1) $0 \in A$،

2) $\forall x \in A : x+1 \in A$.

عندئذ يكون $\mathbb{N} = A$.

ب) إذا كانت $(P(n))$ خاصية مرتبطة بوسيط طبيعي n وتحقق الشرطين :

1) $P(0)$ **صحيحة.**

2) **الاستلزام** $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ **صحيح من أجل كل** $n \in \mathbb{N}$.

عندئذ تكون الخاصية $(P(n))$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

ملاحظة

يتمثل القيام بالبرهان على خاصية $(P(n))$ بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ في التأكد من صحة الشرطين الواردين في ب).

مثال

من أجل كل عدد طبيعي n نضع

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 ,$$

$$\alpha_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

نريد إثبات القضية :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; S_n = \alpha_n \, .$$

من أجل ذلك نسمي $P(n)$ **الخاصية** $S_n = \alpha_n$**.**

نلاحظ أن الخاصية $P(0)$ **تعني :** $S_0 = \sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 = \alpha_0$.

ومن ثمّ نرى بشكل بديهي أنها صحيحة.

لنفرض أن $P(n)$ **صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n، ونثبت صحة** $P(n+1)$.

من السهل التأكد من أن :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \alpha_n - (n+1)^2.\end{aligned}$$

وعندما نستغل فرض التراجع القائل $S_n - \alpha_n = 0$ **فإننا نحصل على:**

$$\begin{aligned}S_{n+1} - \alpha_{n+1} &= \left(S_n + (n+1)^2\right) - \left(\alpha_n - (n+1)^2\right)\\ &= S_n - \alpha_n\\ &= 0.\end{aligned}$$

ومنه $S_{n+1} = \alpha_{n+1}$.

وبالتالي فإن الخاصية $P(n)$ **صحيحة مهما كان العدد الطبيعي n.**

2. العلاقات :

تعريف (الانعكاس، التناظر، التعدي)

لتكن R علاقة ثنائية معرفة في مجموعة غير خالية E. نقول عن العلاقة R إنـها

1) **انعكاسية إذا كان :**

$$\forall x \in E: \quad xRx .$$

2) **تناظرية إذا كان :**

$$\forall x, y \in E: \quad xRy \Rightarrow yRx .$$

3) **ضد تناظرية إذا كان :**

$$\forall x , y \in E : \quad (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y .$$

4) **متعدية إذا كان :**

$$\forall x, y, z \in E : \quad (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz .$$

تعريف (علاقة التكافؤ، صف التكافؤ)

نقول عن علاقة ثنائية R في مجموعة غير خالية E إنها علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية، وتناظرية ومتعدية.

إذا كانت R علاقة تكافؤ معرفة في E، وكان x عنصرا من E، نسمي صف (أو صنف) تكافؤ x بترديد R (أو وفق R) المجموعة $\dot{x}=\{y\in E:\ xRy\}$.

نسمي كل عنصر من الصف $\dot{x}=\{y\in E:\ xRy\}$ ممثلا لهذا الصف، بما في ذلك x .

تسمى مجموعة كل صفوف التكافؤ (في E) وفق R، مجموعة حاصل القسمة، ونرمز لها بـــ $\frac{E}{R}$ أو E/R.

ملاحظة

تشكل مجموعة صفوف التكافؤ تجزئة للمجموعة E، أي أن الشروط التالية محققة :

1) $x=y \quad\Rightarrow\quad \dot{x}=\dot{y}$.

2) $\forall x\in E, \forall y\in E:\ \ x\neq y \quad\Rightarrow\quad \dot{x}\cap\dot{y}=\varnothing$.

3) $\bigcup_{x\in E}\dot{x}=E$.

مثال

نعتبر التوافق في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$: العلاقة R المعرفة بـــ:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv y\,[3]$$

أي $xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}:\ x - y = 3k$ **، هي علاقة تكافؤ. يمكن تحديد جميع صفوف التكافؤ، وهي ثلاثة:**

1) **صف تكافؤ** 0 **هو:** $\dot{0} = \{\, 0 + 3k \,:\, k \in \mathbb{Z} \,\}$ **، أي هي مجموعة مضاعفات** 3 **السالبة والموجبة.**

2) **صف تكافؤ** 1 **هو** $\dot{1} = \{1 + 3k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ **، أي** $\dot{1} = \{-2, -5, -8, \ldots\} \cup \{1, 4, 7, \ldots\}$**.**

3) **صف تكافؤ** 2 **هو** $\dot{2} = \{2 + 3k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ **، أي** $\dot{2} = \{-1, -4, -7, \ldots\} \cup \{2, 5, 8, \ldots\}$**.**

نلاحظ أن أي عدد $n \in \mathbb{Z}$ **ينتمي بالضرورة إلى أحد الصفوف السابقة. وبالتالي فمجموعة حاصل القسمة هي** $\mathbb{Z}/R = \{\, \dot{0}, \dot{1}, \dot{2} \,\}$**.**

تمرين 2

اختر ثلاث قضايا P **،** Q **،** R **بحيث يكون التكافؤ التالي صحيحا:** $P \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R)$**.**

مثال : **نضع** B **مجموعة تلاميذ السنة التاسعة في المتوسطة أ. ونعرف القضية** P **على أنها "كل تلاميذ السنة التاسعة في المتوسطة أ نجحوا في امتحان الأهلية"، والقضية** Q **على أنها** "$x \in B$" **والقضية** R **على أنها** "x **نجح في امتحان الأهلية"** "$x = y$".

مثال ثان : **نعتبر تطبيقا** $f : E \to F$ ونعرف القضية P على أنها "f تباين"، والقضية Q على أنها "$x \in E, y \in E :\ f(x) = f(y)$" والقضية R على أنها "$x = y$". **حينئذ نلاحظ أن التكافؤ يعبر عن تعريف تباين تطبيق.**

تمرين 3

لتكن العلاقة الثنائية R **المعرفة في مجموعة الأعداد الحقيقية:**

$$x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} :\ xRy \ \Leftrightarrow\ x^2 - x = y^2 - y .$$

1) **تأكد من أن** R **علاقة تكافؤ على** $\mathbb{R}$. **هل تظل العلاقة** R **علاقة تكافؤ حتى عند استبدال** $\mathbb{R}$ **بـــ** $\mathbb{N}$.

2) **حدد مجموعة حاصل القسمة** $\mathbb{R}/R$.

تعريف (علاقة الترتيب)

نقول عن علاقة ثنائية R في مجموعة E غير خالية إنها علاقة ترتيب إذا كانت انعكاسية، وضد تناظرية ومتعدية. نقول عن E إنها مرتبة بـــ R. **علاقة ترتيب R هي ترتيب كلي إذا كان كل عنصرين x و y من E يقبلان المقارنة بـــ R أي xRy أو yRx، وإلا فهي ترتيب جزئي.**

مثال

نعرّف في مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة $\mathbb{N}^*$ العلاقة R التالية:

xRy **يعني أن** x **يقسم** y.

وهذا يعني أن

$$\exists k \in \mathbb{N}^* :\ y = kx \iff xRy .$$

تأكد أن العلاقة R علاقة ترتيب:

1) **العلاقة انعكاسية : نلاحظ أنه يمكن التعبير عن** xRx **بـــ** $x = 1.x$، **وهذا مهما كان** $x \in \mathbb{N}^*$. **وبالتالي فالعلاقة انعكاسية.**

2) العلاقة ضد تناظرية : ليكن x و y من $\mathbb{N}^*$ بحيث xRy و yRx . هذا يعني :

$$\exists k,k'\in \mathbb{N}^*:\ y=kx\ \wedge\ x=k'y$$

وبالتعويض نجد

$$\exists k,k'\in \mathbb{N}^*:\ y=kk'y$$

ومنه

$$\exists k,k'\in \mathbb{N}^*:\ (1-kk')y=0\ .$$

وبما أن $y\neq 0$ ينتج أن $1-kk'=0$، أي $kk'=1$. لكن k و k' عددين طبيعيين، ولذا $k=k'=1$. وبالتالي $x=y$.

3) العلاقة متعدية: ليكن x و y و z من $\mathbb{N}^*$ بحيث xRy و yRz ، أي

$$\exists k,k'\in \mathbb{N}^*:\ y=kx\ \wedge\ z=k'y\ .$$

وبالتعويض نجد :

$$\exists k''=k'k\in \mathbb{N}^*:\ z=(k'k)x$$

وهذا يكافئ القول xRz . نستنتج من كل ما سبق أن العلاقة R علاقة ترتيب في $\mathbb{N}^*$.

نلاحظ أن العلاقة R ليست علاقة ترتيب كلي لأنه يوجد على الأقل عنصرين x و y من $\mathbb{N}^*$ بحيث xRy و yRx غير محققتين. خذ مثلا $x=5$ و $y=19$.

تعريف (أصغر وأكبر عنصر)

لتكن E مجموعة مرتبة بعلاقة ترتيب R.
1) يكون عنصر m من E أصغر عنصر في E إذا كان:
$$\forall x \in E: \quad mRx .$$
2) يكون عنصر M من E أكبر عنصر في E إذا كان:
$$\forall x \in E: \quad xRM .$$

ملاحظة

لاحظ أن التعريف السابق لا يؤكد وجود العنصر الأصغر والعنصر الأكبر ... لكنهما وحيدان (إن وجدا).

مثال

أ) ليكن E المجال من $\mathbb{R}$ المعرف بـــ $E = [0,+\infty[$.
نزود $\mathbb{R}$ بعلاقة الترتيب الكلية المألوفة "$\leq$".
1) أصغر عنصر لـــ A هو 0.
2) ليس هناك أكبر عنصر لـــ E.

ب) ليكن E المجال من $\mathbb{R}$ المعرف بـــ $E =]-\infty,0]$.
نزود $\mathbb{R}$ بعلاقة الترتيب الكلية المألوفة "$\leq$".
1) ليس هناك أصغر عنصر لـــ E.
2) أكبر عنصر لـــ E هو 0.

جـــ) ليكن E المجال من $\mathbb{R}$ المعرف بـــ $E =]0,1[$.
نزود $\mathbb{R}$ بعلاقة الترتيب الكلية المألوفة "$\leq$".
1) ليس هناك أصغر عنصر لـــ E.
2) ليس هناك أكبر عنصر لـــ E.

تعريف (العناصر الحادة من الأعلى)

لتكن E مجموعة مرتبة بعلاقة ترتيب R.

1) يكون عنصر m من E عنصر حاد من الأدنى لجزء غير خال A من E إذا كان:

$$\forall x \in A: \quad mRx.$$

2) يكون عنصر M من E عنصر حاد من الأعلى لجزء غير خال A من E إذا كان:

$$\forall x \in A: \quad xRM.$$

3) الحد الأدنى لجزء A من E هو أكبر العناصر الحادة من الأدنى للجزء A. نرمز للحد الأدنى بـــ $\inf A$.

4) الحد الأعلى لجزء A من E هو أصغر العناصر الحادة من الأعلى للجزء A. . نرمز للحد الأعلى بـــ $\sup A$.

ملاحظة

لاحظ أن التعريف السابق لا يؤكد أن الحاد من الأدنى والحاد من الأعلى موجودان، وإن وجدا فهما ليسا بالضرورة وحيدين.

مثال

أ) ليكن A المجال من $\mathbb{R}$ المعرف بـــ $A=[0,1[$. نزود $E=\mathbb{R}$ بعلاقة الترتيب الكلية المألوفة "$\leq$".

كل عدد سالب أو منعدم يمثّل حادا من الأدنى لـــ A.

كل الأعداد الأكبر (أو تساوي) 1 تمثل حواد من الأعلى لـــ A.

$\inf A = 0 \in A$ و $\sup A = 1 \notin A$.

ب) ليكن A المجال من $\mathbb{R}$ المعرف بـــ $A =]0,+\infty[$.

نزود $E = \mathbb{R}$ بعلاقة الترتيب الكلية المألوفة "$\leq$".

كل عدد سالب أو منعدم يمثّل حادا من الأدنى لـــ A.

ليست هناك حواد من الأعلى لـــ A.

$\inf A = 0 \notin A$.

الحد الأعلى غير موجود.

تمرين 4

لتكن $A = \{5,6,8,22\}$ و $B = \{1,3,6,9,12,36\}$

مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{N}^*$ المزودة بعلاقة الترتيب R المعرف آنفا :

xRy يعني أن x يقسم y..

1) تأكد من : A ليس لها أصغر عنصر، وأن B لها أكبر عنصر، وهو 36.

2) عيّن (إن وجدت) الحواد العليا للمجموعة A والحد الأعلى.

3) عيّن (إن وجدت) الحواد الدنيا لـــ A، وكذا الحد الأدنى.

الفصل الثاني

البنى الجبرية

1. الزمـــــرة

1.1 مقدمة :

درج الرياضيون على تقسيم الجبر إلى قسمين : الجبر العام والجبر الخطي. ولا يمكن أن نلمّ بموضوع الجبر الخطي مالم نطلّ، بادئ ذي بدء، على الجبر العام إطلالة وافية. فالجبر الخطي يتمحور حول الفضاءات الشعاعية (أو الفضاءات الخطية، كما يسميها المصطلح الإنكليزي) والتطبيقات الخطية. ومن المعلوم أن مفهوم الفضاء الشعاعي يقوم على مفاهيم تُـــدَرّس في الجبر العام. والجبر العام يتناول عدة بنى جبرية، أهمها بنية الزمرة وبنية الحلقة وبنية الحقل. نحاول في هذا الدرس تقديم أهم عناصر هذه البنى الثلاث.

ومن الطبيعي أن نبدأ ببنية الزمرة، ثم بنية الحلقة، ثم الحقل (الجسم). والملاحظ أننا نلتقي بمفهوم الحلقة عموما في مجموعات الدوال أو المصفوفات. إننا نريد هنا تقديم عدد من التعاريف والتركيز على بعض جوانب بنية الحلقة والحقل دون غيرها. وإذا كان مفهوم الزمرة قد اجتهد الرياضيون في وضعه ودراسته قرنين كاملين فإن مفهوم الحلقة لم يظهر إلا منذ قرن ونيف.

ومن المعلوم أن المدرسة الألمانية الرياضية هي التي كانت من وراء إنشاء مفهوم الحلقة والحقل في أواخر القرن التاسع عشر. وطورها العديد

من الرياضيين الألمان، مثل أرنست كومر Kummer (1810–1893) ورتشارد ديدكيند Dedekind (1831–1916) وليوبولد كرونكر Kronecker (1823–1891) وديفد هلبرت Hilbert (1862–1943).

لقد عاش هؤلاء في نفس الوسط العلمي وبحثوا في مواضيع مشتركة من بينها موضوع الأعداد الجبرية والمعادلات الجبرية والبحث في سبل حلها ... والبحث عن برهان لنظرية فيرما التي أتى عليه الأنكليزي أندريو وايلز في مطلع التسعينيات من القرن العشرين. نذكّر أن نظرية فيرما المشار إليها هنا تقول إن المعادلة $x^n + y^n = z^n$ لا تقبل حلا من أجل أية أعداد طبيعية موجبة x ، y ، z مهما كان $2 < n$. ومن المعلوم أنه تمّ البرهان على بعض الحالات الخاصة منها بدءا من منتصف القرن الثامن عشر. وأدت الدراسات الموالية لهذه المسألة إلى تقدم بالغ الأهمية لما يعرف اليوم بالجبر المجرد والهندسة الجبرية.

والملاحظ أن المصطلحين الألمانيين *Zahlring* (الذي يمكن ترجمته بعدد حلقي) و Körper (حقل) قد ظهرا في كتاب رتشرد ديدكيند *Lehrbuch des Algebra* (كتاب في الجبر) عام 1871. لكن الظاهر أن هلبرت هو الذي استعمل مصطلح *Zahlring* للدلالة على الحلقة في مقاله الذي عنوانه

Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Vol. 4, 1897.

ويذكر أن أدولف فرنكل Fraenkel (1891–1965) **هو الذي قدم المسلمة الأولى الواردة في تعريف الحلقة وذلك ضمن بحث صدر عام** 1914 **في المجلة الرياضية** *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (**مجلة الرياضيات البحتة والتطبيقية التي أنشئت عام** 1826 **بألمانيا**).

وفي عام 1921 **قدمت إيمي نوثر** Noether (1882–1935) **الأسس المسلّمية لنظرية الحلقات التبديلية في بحثها الضخم** *Ideal Theory in Rings* (**نظرية المثاليات في الحلقات**). **ولا بد من الإشارة في الأخير إلى أن الحلقة في زمن هلبرت كانت تدل على نوع خاص من الحلقات (وهي الحلقات الواحدية التبديلية).**

وقد لاحظنا أن الجانب التاريخي لمفاهيم الزمرة والحلقة والحقل تغفله معظم كتب الجبر والرياضيات المتداولة، ولذلك ارتأينا أن نزوّد الطالب المفتش بلمحة تاريخية (في ذيل الفصل) تبرز أهم المراحل التي مرّت بها هذه المفاهيم. وسيدرك القارئ من خلال هذه الإطلالة التاريخية مدى اجتهادات الرياضيين خلال قرنين، وهي الإجتهادات التي جعلت تلك المفاهيم تبلغ ما مبلغته اليوم من تقدم وانتشار في العديد من الفروع العلمية.

2.1 تعاريف وأمثلة :

تعريف (الزمرة)

لتكن G مجموعة مزودة بعملية داخلية نرمز لها برمز الضرب ".". نقول عن الثنائية $(G,.)$ إنها زمرة إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية :

1) التجميع :

$$\forall x\in G,\ \forall y\in G,\ \forall z\in G,$$
$$x.(x.y)=x.(y.z).$$

2) وجود العنصر الحيادي : يوجد عنصر، نرمز إليه بـــ 1 (وقد نرمز إليه أحيانا بـــ e)، يسمى العنصر الحيادي، يحقق :

$$\forall x\in G,\quad x.1=1.x=x.$$

3) وجود النظير (أو المقلوب، أو معكوس):

$$\forall x\in G,\ \exists x'\in G:\quad x.x'=x'.x=1.$$

ملاحظة

احذر من القول إن الزمرة هي "مجموعة" نعرّف عليها قانونا داخليا يحقق الخواص الثلاث السالفة الذكر. ذلك أنه بالإمكان البرهان على أننا نستطيع دوما تعريف مثل ذلك القانون على أية مجموعة ... بل إن كانت المجموعة غير منتهية فإنه بالإمكان أن نعرّف عليها عددا غير منته من القوانين الداخلية المحققة للخواص السابقة. ولذلك فمن الأهمية بمكان أن نعرّف الزمرة على أنها ثنائية مكوّنة من مجموعة وقانون داخلي معيّن.

تعريف (الزمرة التبديلية، الزمرة الجزئية)

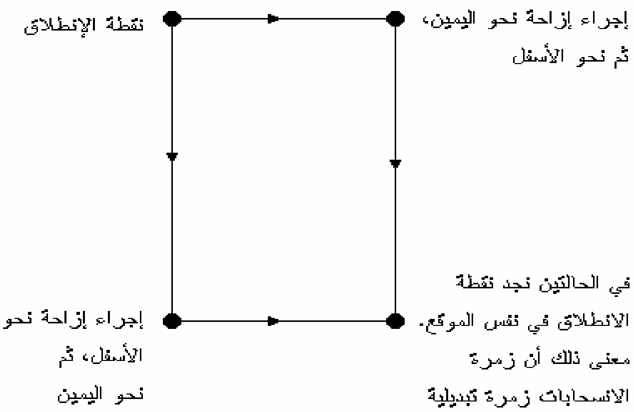
> **نقول عن زمرة $(G,.)$ إنها تبديلية أو آبلية (نسبة إلى Abel) إذا كانت عمليتها تبديلية.**
>
> **لتكن $(G,.)$ زمرة و $G \supset H$. إذا كانت $(H,.)$ زمرة فإننا نقول إن $(H,.)$ زمرة جزئية من $(G,.)$.**

أمثلة

1) **الثنائيات المألوفة** $(\mathbb{C}^*,.)$ ، $(\mathbb{R}^*,.)$ ، $(\mathbb{C},+)$ ، $(\mathbb{R},+)$ ، $(\mathbb{Q},+)$ ، $(\mathbb{Z},+)$ **كلها زمر.**

2) **الثنائيات المألوفة** $(\mathbb{R},.)$ ، $(\mathbb{Q},.)$ ، $(\mathbb{N},.)$ **ليست زمرا ... مثلا لأن** 0 **لا نظير (مقلوب) له.**

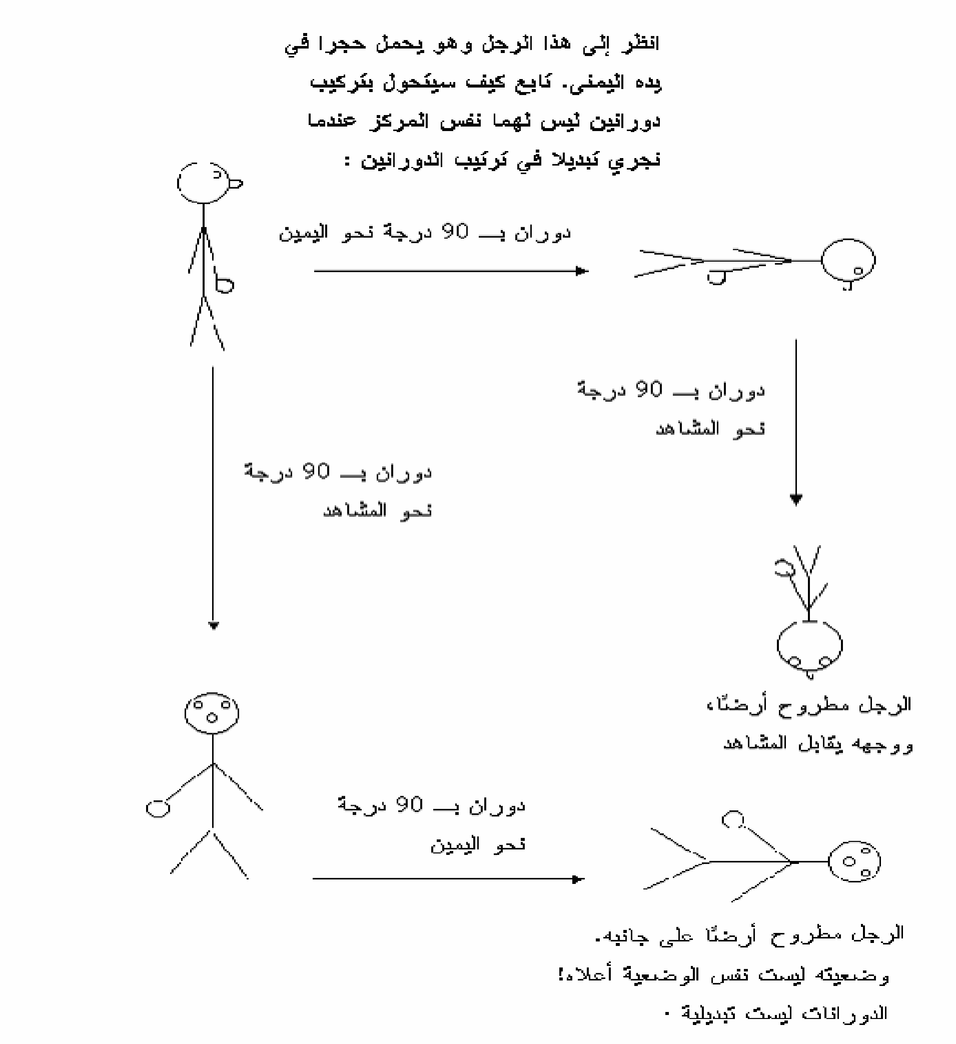
3) **مجموعة الانسحابات في المستوي المزودة بقانون التركيب زمرة تبديلية:**



4) مجموعة الانسحابات والتحاكيات في المستوي المزودة بقانون التركيب زمرة.

5) مجموعة التحاكيات في المستوي المزودة بقانون التركيب ليست زمرة.

6) مجموعة الدورانات في المستوي التي لها نفس المركز (المزودة بقانون التركيب) زمرة غير تبديلية :



7) E مجموعة منتهية، $(G,\circ)$ مجموعة كل التبديلات على E (أي التقابلات من E نحو E) المزودة بقانون التركيب زمرة، تسمى أحيانا زمرة التحويلات على E.

8) دائرة الوحدة العقدية المكونة من الأعداد العقدية ذات الطويلة المساوية لـــ 1 التي نزودها بعملية الضرب المعتاد.

9) مجموعة التطبيقات الخطية من فضاء شعاعي E في نفسه تشكل زمرة عند تزويدها بقانون تركيب التطبيقات.

10) تمثل المجموعة $GL_n(\mathbb{R})$ زمرة المصفوفات المربعة $n\times n$ القابلة للقلب المزودة بعملية ضرب المصفوفات. تسمى هذه الزمرة الزمرة الخطية من الدرجة n. إنها زمرة غير تبديلية. ومن الزمر الجزئية لـــ $GL_n(\mathbb{R})$ نذكر أربع هي :

$SL_n(\mathbb{R})$: زمرة المصفوفات ذات المحدد المساوي لـــ 1.

$D_n(\mathbb{R})$: زمرة المصفوفات القطرية.

$T_n(\mathbb{R})$: زمرة المصفوفات المثلثية من الأعلى.

$UT_n(\mathbb{R})$: زمرة المصفوفات المثلثية من الأعلى التي عناصر أقطارها تساوي 1.

تعريف (الزمرة المنتهية، المميزة، البسيطة)

نقول عن زمرة إنها منتهية إن كان عدد عناصرها منتهيا، ونسمي عدد عناصرها رتبة الزمرة.

لتكن $(G,.)$ زمرة و $(H,.)$ زمرة جزئية منه. نقول عن $(H,.)$ إنها زمرة مميّزة (أو اعتيادية أو لامتغيرة) إذا كان :

$$\forall x \in G,\ \forall h \in H\ :\ x.h.x^{-1} \in H.$$

نقول عن زمرة $(G,.)$ إنها بسيطة إن كانت زمرها المميزة الوحيدة هي $(G,.)$ ذاته وزمرة العنصر الحيادي $(\{1\},.)$.

ملاحظة

1) من الواضح أنه إذا كانت زمرة تبديلية فإن جميع زمرها الجزئية زمر مميزة.

2) تكتسي الزمر البسيطة المنتهية في الجبر أهمية بالغة حيث يمكن اعتبارها بمثابة أساس الزمر المنتهية شأنها في ذلك شأن الأعداد الأولية في مجموعة الأعداد الطبيعية. ولذا بذل الرياضيون جهودا كبيرة من أجل تحديدها وتصنيفها.

مثال : نلاحظ في زمرة الدورانات والانسحابات في المستوي أن الزمرة الجزئية المؤلفة من الانسحابات زمرة مميزة.

تعريف (الزمرة الموَلَّدة)

لتكن $(G,.)$ زمرة و A جزءا من G. الزمرة الجزئية من $(G,.)$ الموَلَّدة عن A هي أصغر زمرة (بمفهوم الاحتواء) تحتوي الجزء A.   **نرمز عادة للزمرة المولدة عن A بـــ $<A>$.**

أمثلة

1) **في الزمرة** $(\mathbb{Z},+)$: $\mathbb{Z}=\langle 1\rangle$.

2) **في الزمرة** $(\mathbb{Q},+)$: $\mathbb{Q}=\left\langle \frac{1}{n},\ \ n=1,2,3,...\right\rangle$.

3) **في الزمرة** $(\{1,-1\},.)$: $\{1,-1\}=\langle -1\rangle$.

تعريف (الزمرة التناظرية)

لتكن E مجموعة و $S(E)$ مجموعة التقابلات من E نحو E.   **إننا نحصل على زمرة عندما نزوّد $S(E)$ بقانون تركيب التطبيقات.**   **تسمى هذه الزمرة الزمرة التناظرية (أو زمرة التناظر) لــ E.**   **رمز : إذا كان $E=\{1,2,...,n\}$ فإننا نرمز بـــ S_n لــ $S(E)$.**

ملاحظة

1) **رتبة** S_n **هي** $n!$.

2) **لاحظ أن** S_n **زمرة ليست تبديلية من أجل** $3\leq n$.

تعريف (التماثل، التشاكل)

لتكن $(G,.)$ و $(G',.)$ زمرتين و $f:(G,.)\to(G',.)$ تطبيقا.
نقول عن f إنه تماثل إذا حقق الشرط :

$$\forall x\in G,\ \forall y\in G',\ \ f(x.y)=f(x).f(y).$$

نقول إن هذا التماثل تشاكل إن كان تقابلا (أي أن تشاكل زمر هو تماثل زمر تقابلي).

مثال : لاحظ أن $(\mathbb{R}_+^*,.)$ و $(\mathbb{R},+)$ زمرتان وأن التطبيق f المعرّف بـــ

$$f:(\mathbb{R}_+^*,.)\to(\mathbb{R},+)$$
$$x\mapsto \ln x$$

تماثل تقابلي (تشاكل) بين الزمرتين المذكورتين.

عندما نعتبر مجموعتين ونعرف تطبيقا يصل الأولى بالثانية فإن ذلك التطبيق يعتبر عملية جبرية. فالجبر لا يهتم بطبيعة عناصر المجموعتين أكثر مما يهتم بطبيعة تأثير التطبيق الواصل بين المجموعتين. لتكن M و M' مجموعتين مزودتين بعمليتين جبريتين و $T:M\to M$ تقابلا أو "تشاكلا تقابليا" ... أي تقابل يحافظ على البنى الجبرية. ومن هذا المنظور فنحن لا نفرّق بين عنصر وصورته ... لا نفرّق بين عنصرين متشاكلين أو متماثلين.

وحتى نوضّح كلامنا نعتبر أن M و M' هما نسختان لنفس الكتاب مستخرجتان من طبعتين مختلفتين. فإن كان التقابل بين كلمات الكتاب أو بين حروف كلماته فإن التقابل لا يعكس ما إذا كان ورق الطبعة الأولى يختلف عن ورق الطبعة الثانية، ولا يهمه إن تغيّر حجم الحرف بين الطبعتين ... فهو لا يفرّق بين النسختين إن كان مضمون الكتاب قد ظلّ بدون تغيير عند طبعه مرة ثانية.

لنوضح أهمية التماثل في الفيزياء : نعتبر من أجل ذلك عنصرين g_1 و g_2 من زمرة G (مثلا دورانان لمكثف) والتحويلين $T(g_1)$ و $T(g_2)$ لـــ g_1 و g_2 اللذين يؤثران على كمية فيزيائية معينة (مثلا الحقل الكهربائي للمكثف السابق الذكر) عبر التحويل T. وحتى تمثّل التحويلات $\{T(g_i)\}$ تمثيلا حسنا للزمرة G لا بد من أن يكون جدول ضرب (أي قانون) الزمرة $\{T(g_i)\}$ محافظا على الانتقال من $\{g_i\}$ إلى $\{T(g_i)\}$، أي لا بد من أن "يستنسخ" T جدول ضرب $\{g_i\}$ عندما ينقلنا إلى $\{T(g_i)\}$.

ويعبّر الفيزيائيون عن ذلك بالقول : إذا تتابع g_1 و g_2 وكان حاصل ضربهما g_3 فإن تتابع $T(g_1)$ و $T(g_2)$ لا بد أن يعطي $T(g_3)$. ويكتب ذلك رياضيا على الشكل :

$$\forall g_1 \in G,\ \forall g_1 \in G, \quad T(g_1.g_2) = T(g_1).T(g_2) \ .$$

وهكذا نجد أنفسنا أمام تماثل زمر (من الزمرة G إلى الزمرة $T(G)$ مثلا) !

لنقدم مثالا لزمرة تناظر ... تناظر مثلث متقايس الأضلاع :
تضم زمرة تناظر المثلث المتقايس الأضلاع 6 عناصر هي :

- التحويل المطابق،
- دورانان R_1 و R_2 المعرفان بالزاويتين $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (باعتبار المركز هو مركز ثقل المثلث مثلا)،
- التناظرات المحورية S_A ، S_B ، S_C بالنسبة للارتفاعات الثلاثة المرتبطة على التوالي بالزوايا A ، B ، C.

أما القانون الذي يعرّف هذه الزمرة فهو التركيب الذي يفضل الفيزيائيون تسميته جدول (الضرب)، وهو المعطي كالتالي (تأكد من صحته) :

	I	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
I	I	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
R_1	R_1	R_2	I	S_B	S_C	S_A
R_2	R_2	I	R_1	S_C	S_A	S_B
S_A	S_A	S_C	S_B	I	R_2	R_1
S_B	S_B	S_A	S_C	R_1	I	R_2
S_C	S_C	S_B	S_A	R_2	R_1	I

3.1 لماذا يهتم الفيزيائيون بالزمر؟

قال أحد كبار الفيزيائيين المعاصرين مؤخرا : "تبيّن الكتابات الخاصة بفيزياء الجسيمات خلال العشرية الماضية أن سوء استعمال نظرية الزمر كان أقوى من حسن استعمالها. فالمؤلفون كانوا لا يلّمون بها إلا قليلا أو كان لهم إفراط في معرفتها" !

لماذا يهتم الفيزيائي بمفهوم التناظر وبنظرية الزمر؟ نلاحظ على سبيل المثال أن قانون حفظ الطاقة قد تم اكتشافه في إطار نظرية الديناميك الحرارية خلال القرن التاسع عشر، ولم يتم اكتشافه كنتيجة تعتمد على خواص لاتغير الزمن عبر الانسحابات. والملاحظ اليوم أن معظم القوانين التجريبية التي اكتشفت عبر العصور (من عهد نيوتن إلى عصرنا هذا) كانت نتائج مؤسسة على التناظرات المرتبطة بالقوانين الفيزيائية.

ماذا يعني مفهوم الزمرة بالنسبة للفيزيائي : الزمرة هي مجموعة تحويلات (دورانات، انسحابات، تحويلات معيّنة، إلخ) مع جدول (ضرب) بين قيم تراكيبها (بصفتها قانون داخلي) تتجلى فيه خواص الزمرة (التجميع والعنصر الحيادي والتناظر). ولماذا يمتلك نظام فيزيائي بنية جبرية؟ الفكرة الأساسية تكمن في أن تركيب تناظرين هو تناظر ... أما بقية الشروط فهي طبيعية في معظم الحالات.

والواقع أن مفهوم التناظر في الفيزياء مرتبط بمفهوم اللاتغيّر. مثال ذلك : يمتلك المربع زمرة تناظر لأنه لا يتغيّر بفعل مجموعة التحويلات التالية:

- الدورانات بالزوايا 0 ، $\frac{\pi}{2}$، π ، $\frac{3\pi}{2}$،
- التناظر المحوري بالنسبة للقطرين ومحاور الأضلاع.

احظ أن مجموعة هذه التحويلات تشكل زمرة. نقول في هذه الحالة إن "النظام لامتغيّر" (صامد) بزمرة التحويلات المذكورة.

الصمود (أو اللاتغير) في الفيزياء بفعل زمرة الانسحابات يعني أن التجربة التي تتم داخل مقصورة فضائية بعيدا عن وجود أية مادة تجربة مستقلة عن موقع المقصورة. وفي هذه الحالة فإننا لا نستطيع أن نقول بأن النظام صامد ما دام قد انسحب ... بل الصامد هو "معادلات الحركة" التي يخضع لها النظام الفيزيائي. ومن ثمّ نستطيع القول إن الصمود في الفيزياء لا يعني عموما صمود النظام بل صمود القوانين الفيزيائية.

4.1 تعاريف ونتائج :

تعريف (زمرة الجداء)

لتكن $(G_1,.)$ و $(G_2,.)$ **زمرتين. إن تزويد الجداء** $G_1\times G_2$ **بالقانون، الذي نرمز إليه أيضا برمز الضرب :**

$$\forall(x,y)\in G_1\times G_2,\ \forall(x',y')\in G_1\times G_2:\ (x,y).(x',y')=(x.y,x'.y')$$

يجعل من $G_1\times G_2$ **زمرة، تسمى زمرة جداء الزمرتين** $(G_1,.)$ و $(G_2,.)$.

تعريف (علاقة تكافؤ)

لتكن $(G,.)$ **زمرة و** H **زمرة جزئية مميزة. نعرّف علاقة تكافؤ** R **على** G **بـــ**

$$xRy \iff x^{-1}.y\in H\ .$$

صنف التكافؤ $\overline{x}$ **وفق هذه العلاقة من أجل كل** $x\in G$ **هو**

$$\overline{x}=\{y\in G: xRy\}\ .$$

ما هي زمرة نسبة G **على** H **، التي نرمز إليها بـــ** G/H**؟ إنها المجموعة :**

$$G/H=\{\overline{x},\ \ x\in G\}$$

المزودة بقانون النسبة المألوف، الذي نرمز إليه أيضا برمز الضرب:

$$\forall x\in G,\ \ \forall y\in G:\ \overline{x}\ .\ \overline{y}=\overline{x\ .\ y}\ .$$

تمرين 1

1) **تأكد من أن** G/H **زمرة.**

2) **تأكد من أن** : $H=\bar{1}=[x\in G:\ 1Rx]$.

مثال

من أجل n **طبيعي في** $\mathbb{N}^*$ **يمكن إثبات أن** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **زمرة منتهية رتبتها** n .

لاحظ أن

$$\bar{x}=\bar{y} \Leftrightarrow x-y\in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow x-y \text{ يقسم } n .$$

نظرية (التوليد)

لتكن G **زمرة و** a **عنصرا منها بحيث** $\langle a\rangle=G$.

1) **نفرض أن** G **غير منته. إن العنصرين الوحيدين اللذين يولدان** G **هما** a **و** a^{-1} .

2) **نفرض أن** G **منته ورتبته** n **. إن مولدات من الرتبة** n **، وهي العناصر** a^k **حيث** k **و** n **أوليان فيما بينهما.**

البرهان

1) **ما دام** a **فمن الواضح أن** a^{-1} **مولد أيضا ذلك أن**

$$\forall x \in G,\ \exists n \in \mathbb{Z}:\ \ x = a^n = (a^{-1})^{-n}.$$

ليكن b **مولدا للزمرة** G. **لما كان** a **مولدا فإنه يوجد عدد صحيح** m **بحيث** $b = a^m$. **وبتوليد** b **للزمرة يستلزم وجود عدد صحيح** p **بحيث** $a = b^p$. **وبالتالي :** $b = b^{mp}$، **أي** $1 = b^{1-mp}$. **لكن رتبة** b **ليست منتهية (لأن** G **غير منته). ومنه ، أي** $mp = 1$، **مع العلم أن** m **و** p **صحيحان. ولذا** $m = 1$ **أو** $m = -1$. **ومن ثمّ :** $a = b$ **أو** $a^{-1} = b$.

2) **ليكن** b **مولدا للزمرة** G. **لنثبت أن رتبة** b **تساوي** n. **نعلم حسب نظرية (لاغرانج، نسلّم بها هنا وسنعود إلى الحديث عنها) أن رتبة** b **يقسم** n. **لو كان** $b \neq n$ **فإنه لا يمكن أن يولد** b **الزمرة** G. **إذن رتبة** b **تساوي** n.

نعتبر الآن عددا صحيحا k **بحيث يكون** $b = a^k$ **مولدا. ولما كان** b **مولدا فإن يوجد عدد صحيح** m **بحيث** $a = b^m$. **إذن :** $b = b^{km}$، **أي :** $1 = b^{1-km}$. **لكن رتبة** b **تساوي** n **(لأن** b **مولد)، ومنه يوجد عدد صحيح** p **يحقق** $1 - km = pn$. **وعندئذ ينتج من نظرية بيزوت أن** k **و** n **أوليان.**

وبالعكس، إذا افترضنا بأن k و n أوليان، علينا أن نبيّن بأن $b=a^k$ مولد للزمرة G. يتضح من نظرية بيزوت أنه يوجد (u,v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $uk+vn=1$.

ولما كانت رتبة a تساوي n فإن $(a^k)^u=a^{uk}=a^{1-vn}=a.(a^n)^{-v}=a$. وبالتالي فإن a تساوي قوة لـــ a ذاته. ومن ثم يأتي المطلوب.

نظرية (التوليد والأعداد الصحيحة)

1) كل زمرة وحيدة المولد وغير منتهية متشاكلة مع $\mathbb{Z}$.
2) كل زمرة وحيدة المولد ومنتهية رتبتها n متشاكلة مع $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

البرهان

1) لتكن $\langle a\rangle$ زمرة مولدة بعنصر واحد وغير منتهية. نعتبر التطبيق

$$\varphi:(\mathbb{Z},+)\to(\langle a\rangle,.)$$
$$n\mapsto a^n.$$

إنه غامر بشكل واضح، وهو تطبيق متباين لأن المساواة $a^m=a^n$ مع $m>n$ تؤدي إلى $a^{m-n}=1$. وهذا يستلزم أن الزمرة $\langle a\rangle$ منتهية (رتبتها أصغر من العدد $m-n$ أو تساويه) ... ونحن افترضنا أن $\langle a\rangle$ غير منتهية.

ومن جهة أخرى، نلاحظ أن لدينا من أجل كل عددين صحيحين m و n :

$$\begin{aligned}\varphi(n+m) &= a^{n+m} \\ &= a^{n}\times a^{m} \\ &= \varphi(n).\varphi(m)\end{aligned}$$

وبالتالي فالتطبيق φ تشاكل (أي تماثل تقابلي) بين الزمرتين $(\mathbb{Z},+)$ و $(\langle a\rangle,.)$.

2) لتكن $\langle a\rangle$ زمرة مولدة بعنصر واحد ومنتهية رتبتها n. نعلم أن الزمرة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ مولدة بعنصر واحد، رتبتها n، ويمكن كتابة

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)=\left\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},...,\overline{n-1}\right\}$$

وتعريف التطبيق :

$$\begin{aligned}\varphi:(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+) &\to (\langle a\rangle,.) \\ \overline{p} &\mapsto a^{p}\end{aligned}.$$

تأكد– كما جاء في القضية السابقة – من أن φ تشاكل (أي تماثل تقابلي) بين الزمرتين $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ و $(\langle a\rangle,.)$.

تقول نظرية لاغرانج إن رتبة عنصر في زمرة منتهية تقسم رتبة الزمرة. يمكن أن نصيغ هذه نظرية أيضا كما يلي : إذا كانت m رتبة زمرة جزئية (من زمرة G معطاة رتبتها n) مولدة عن عنصر فإن m يقسم n.

كيف نـــثبت ذلك؟ لتكن H زمرة جزئية رتبتها m من زمرة رتبتها n. ماذا يمكن القول حول مجموعة العناصر $\overline{x}$ المعرفة بـــ $\overline{x}=\{y\in G, y\in xH\}$ من أجل العناصر x المنتمية إلى G؟ إذا رمزنا بـــ A للمجموعة $A=\{\overline{x}:\ x\in G\}$ فإننا نلاحظ بأنها تتشكل من أصناف تكافؤ وأن عدد عناصر كل صنف تكافؤ يساوي m لأن التطبيق

$$\begin{aligned} f_x : \overline{x} &\to xH \\ y &\mapsto xy \end{aligned}$$

تقابل (تأكد من ذلك). وكذلك الأمر بالنسبة للتطبيق

$$\begin{aligned} g_x : xH &\to H \\ xy &\mapsto y. \end{aligned}$$

م إن العناصر $\overline{x}$ تشكل تجزئة لـــ G. أكمل البرهان.

هناك من ينص على نظرية لاغرانج على النحو التالي : لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية منها. إن رتبة H تقسم رتبة G.

تمرين 2

لتكن $(G,.)$ زمرة منتهية رتبتها n و a عنصرا كيفيا منها، نرمز لعنصرها الحيادي بـــ 1. أثبت أن $a^n=1$.

إليك في نفس السياق هذه النظرية :

نظرية كوشي

ليكن p عددا أوليا يقسم رتبة زمرة منتهية G.
عندئذ يوجد على الأقل عنصر من G رتبته p.

تعريف (زمر سيلو)

ليكن p عددا أوليا.
1) **نقول عن زمرة منتهية إنها $p-$ زمرة إن كانت رتبتها تساوي قوة للعدد p** (أي إن كتبت رتبتها على الشكل p^k، حيث k عدد طبيعي).
2. **إذا كانت رتبة زمرة منتهية G تكتب على الشكل $n = p^{\alpha}.m$ حيث p لا يقسم m فإننا نقول عن كل زمرة جزئية إنها $p-$ زمرة سيلو** (أو $p-$ زمرة سيلوية أو $p-$ سيلو) **إن كانت رتبتها تساوي p^{α}.**

النظرية الأولى لسيلو

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n وكان n يحقق العلاقة $n = p^{\alpha}.m$ حيث p عدد أولي لا يقسم m فإن G تملك زمرة $p-$ سيلوية.

ملاحظة

لاحظ أن هذه النظرية تؤدي إلى نظرية كوشي. لنوضح ذلك :

ليكن p عددا أوليا يقسم الرتبة n لزمرة منتهية G. إذن يوجد عددان طبيعيان m و α يحققان العلاقة $n = p^{\alpha}.m$ مع القيد p لا يقسم m (ذلك أنه إذا حدث العكس فما علينا سوى تغيير الأس α). ومن ثم تتحقق شروط نظرية سيلو. إذن G تملك زمرة p – سيلوية، أي زمرة رتبتها من الشكل p^{β} .

لكن p عدد أولي يقسم تلك الرتبة. وحسب نظرية لاغرانج فإنه توجد زمرة جزئية H رتبتها القاسم p . ومن ثم يوجد عنصر a من H رتبته p . لماذا؟ نعتبر عنصرا a من H يختلف عن العنصر الحيادي. ما هي رتبته؟ هل يمكن أن تكون أصغر تماما من p ؟ لا ! لأن p أولي و a من H يختلف عن العنصر الحيادي. هل يمكن أن تكون رتبة a أكبر تماما من p ؟ لا ! لأنه لا يمكن أن تتجاوز رتبة H .

تعريف (الترافق)

نقول عن زمرتين جزئيتين H و K من $(G,.)$ إنهما مترافقان إن وجد عنصر a من G بحيث $aHa^{-1} = K$.

تمرين 3

إذا كانت زمرتان جزئيتان من زمرة $(G,.)$ مترافقتين فإنهما متقابلان (ومن ثم فلهما نفس الرتبة في الحالة التي تكون فيها الزمرة $(G,.)$ منتهية).

النظرية الثانية لسيلو

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n، وكان n يحقق العلاقة $n = p^{\alpha}.m$ حيث p عدد أولي لا يقسم m فإن G يمتلك (حسب النظرية السابقة) زمرة $p-$ سيلوية على الأقل. إن الزمر $p-$ السيلوية كلها مترافقة وعددها يقسم n.

تمرين 4

أثبت أن زمرة جزئية H $p-$ سيلوية من زمرة G تكون مميزة إذا وفقط إن كانت H الزمرة الـــ $p-$ سيلوية الوحيدة.

النظرية الثالثة لسيلو

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n وكان n يحقق العلاقة $n = p^{\alpha}.m$ حيث p عدد أولي لا يقسم m فإن G يمتلك (حسب النظرية السابقة) زمرة $p-$ سيلوية على الأقل. إن العدد k للزمر $p-$ السيلوية يحقق العلاقة $k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$، (أي $k = l.p+1$).

تطبيق

يمكن استخدام نظريات سيلو لإثبات أن كل زمرة رتبتها تساوي 63 لا يمكن أن تكون بسيطة. لنر ذلك :

نذكر أننا نقول عن زمرة إنها بسيطة إن كانت الزمر الجزئية المميزة الوحيدة هي الزمرة نفسها وزمرة العنصر الحيادي. نعتبر فيما سبق $p=7$. كم يبلغ عدد الزمر الجزئية 7−سيلوية؟ إنه عدد k يقسم 63 ويكتب على الشكل $k=l.7+1$. العدد الوحيد الذي يحقق ذلك هو $k=1$. إذ هناك زمرة 7− سيلوية واحدة. وحسب التمرين السابق فهذا يستلزم أن هذه الزمرة مميزة. ومن ثم فالزمرة التي رتبتها 63 ليست بسيطة.

تمرين 5

لتكن G زمرة منتهية رتبتها n وكان n يحقق العلاقة $n=p^{\alpha}.m$ حيث p عدد أولي لا يقسم m . وليكن k عدد الزمر الـــ p − سيلوية.

أثبت أن k أولي مع p ..

5.1 تمارين أساسية :

تمرين 1

أثبت أن $(G,.)$ **زمرة جزئية من** $(G,.)$ **إذا وفقط إذا كان :**

$$\begin{cases}\forall x\in H,\ \ \forall y\in H:\ \ \ x.y\in H,\\ x\in H\ \ \Rightarrow\ \ x^{-1}\in H.\end{cases}$$

تمرين 2

أثبت أن تقاطع زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية.

تمرين 3

لتكن $(G,.)$ **زمرة و** A **جزءا من** G. **أثبت أن الزمرة المولَّدة** $<A>$ **هي مجموعة عناصر** G **التي تكتب على شكل جداء أسس لعناصر** A .

تمرين 4

لتكن $(G,.)$ **زمرة و** $(H,.)$ **زمرة جزئية منه.**

1) **أثبت أن** $(H,.)$ **تكون مميزة إذا كان :**

$$\forall x\in G,\ \ xHx^{-1}=H.$$

2) **بيّن أن الشرط السابق يكافئ :**

$$\forall x\in G,\ \ xH=Hx.$$

تمرين 5

1) **تأكد من أن الجداء زمرتين يمثل زمرة.**

2) **لتكن** $(G_i,\cdot_i)_{i=1,\dots,n}$ n **زمرة. وضح كيف يمكن تعريف زمرة الجداء الديكارتي** $G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$.

تمرين 6

أثبت أنه إذا كانت $(G,.)$ زمرة و $a\in G$ فإن :

$$\forall m,\ \forall n\in \mathbb{Z},\quad a^m.a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{m.n}.$$

مع العلم أن 1 هو العنصر الحيادي في الزمرة وأن :

$$a^0 = 1$$
$$\forall p\in \mathbb{Z}^-, a^p = (a^{-1})^{-p} = \underbrace{(a^{-1}).(a^{-1})...(a^{-1})}_{\text{مرة}\ (-p)}\ .$$

تمرين 7

إذا كانت $(G,.)$ زمرة و $a\in G$ عنصر حقق $a^n = 1$ فإن أصغر عدد طبيعي $n>0$ يسمى رتبة أو دورة العنصر a. هناك من يرمز لهذه الرتبة بـــ $|a|$.

وإذا كان $a^n \neq 1$ من أجل كل $n\in \mathbb{N}^*$ فإننا نقول إن a غير منتهية الرتبة ونكتب $|a| = \infty$.

1) نفرض أن $a^n = 1$ من أجل عدد طبيعي $n>0$.

أ) أثبت أن $|a|$ يقسم n.

ب) نفرض في هذا السؤال أن $|a| = n$ وأن $n = n_1^{p_1}\times n_2^{p_2}\times ...\times n_r^{p_r}$ هو تفكيك العدد n إلى عوامل أولية. أثبت أن $\left|a^{n_1^{p_1}}\right| = n_2^{p_2}\times ...\times n_r^{p_r}$.

2) ليكن b عنصرا من G. نفرض أن $a.b = b.a$، وأن $|a| = n$ و $|b| = p$.

أ) نفرض أن n و p أوليان فيما بينهما. أثبت أن $|a|.|b| = |a.b|$.

ب) لا نفرض هنا بأن n و p أوليان فيما بينهما. أثبت أنه يوجد عنصر c من G (لا يساوي بالضرورة $a.b$) رتبته تساوي المضاعف المشترك الأصغر للعددين n و p.

تمرين 8

لتكن $(G,.)$ زمرة و A ، B زمرتين جزئيتين من G. نعرّف مجموعة الجداء AB بـــ

$$AB = \{a.b \in G : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

برهن أن المجموعة AB تكون زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان $AB = BA$.

تمرين 9

لتكن $(G,.)$ زمرة و A ، B زمرتين جزئيتين منتهيتين من G. أثبت العلاقة : $|AB| = \dfrac{|A|.|B|}{|A \cap B|}$.

تمرين 10

أثبت أن تقاطع جماعة كيفية من الزمر الجزئية زمرة جزئية.

2. الحلقة :

1.2 تعريف الحلقة وأمثلة أولية :

تعريف (الحلقة)

لتكن G مجموعة مزودة بعمليتين داخليتين نرمز لهما برمز الجمع "+" ورمز الضرب "." . نقول عن الثلاثية $(G,+,.)$ إنها حلقة إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1) **$(G,+)$ حلقة تبديلية.**

2) **التجميع بالنسبة لعلية الضرب :**

$$\forall x\in G,\ \forall y\in G,\ \forall z\in G,$$
$$x.(y.z)=(x.y).z.$$

3) **توزيع الضرب بالنسبة للجمع :**

$$\forall x\in G,\ \forall y\in G,\ \forall z\in G,$$
$$x.(y+z)=x.y+x.z,$$
$$(y+z).x=y.x+z.x.$$

ملاحظة

1) **لاحظ صحة العلاقة التالية من أجل كل a، b، c من حلقة** G: $a(c-b)=a.c-ab$ **وكذا العلاقة** $(c-b).a=c.a-b.a$ ،

ذلك أن :

$$\begin{aligned} a.(c-b)+a.b &= a\left(c-b+b\right) \\ &= a.c. \end{aligned}$$

ومنه $a(c-b)=a.c-ab$. **بنفس الطريقة نتأكد من** $(c-b).a=c.a-b.a$.

2) **باعتبار** $c=0$ **في العلاقتين نستنتج أن** $a(-b)=-ab$ **و** $(-b).a=-b.a$.

3) **لاحظ أيضا صحة العلاقة التالية من أجل كل** a **من حلقة** G :

$(-a)^n=a^n$ **عندما يكون** n **عددا طبيعيا زوجيا،**

$(-a)^n=-a^n$ **عندما يكون** n **عددا طبيعيا فرديا.**

لرؤية ذلك نستفيد مما سبق فنجد أن :

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -(-a).b \\ &= -\left((-a).b\right) \\ &= -\left(-a.b\right). \end{aligned}$$

لاحظ هنا أن العنصر $-(-a.b)$ **يمثل نظير نظير** $a.b$ **(علما أن نظير نظير عنصر في زمرة، هو العنصر ذاته). ومنه** $(-a).(-b)=a.b$. **وبصفة خاصة يأتي** $(-a)^2=(-a).(-a)=a^2$. **هذه العلاقة تكفي لإثبات المطلوب.**

لاحظ أيضا أنه يمكن أن تقبل عملية الضرب عنصرا حياديا، كما يمكن أن تكون عملية الضرب تبديلية، ومنه التعريف التالي :

تعريف (الحلقة الواحدية)

* **نقول عن حلقة** $(G,+,.)$ **إنها واحدية إذا وجد عنصر، نرمز إليه بـــ** 1 ، **يسمى الوحدة، يحقق :**

$$\forall x \in G, \quad x.1 = 1.x = x.$$

* **نقول عن حلقة** $(G,+,.)$ **إنها تبديلية إذا كانت عملية الضرب تبديلية، أي :**

$$\forall x \in G,\ \exists y \in G :$$
$$x.y = y.x.$$

* **إذا كان عنصران** x **و** y **من حلقة واحدية** $(G,+,.)$ **يحققان العلاقة** $x.y = y.x = 1$ **فإننا نقول إن** x **يقبل العكس (أو القلب) ونسمي** y **معكوسه (أو مقلوبه) ونرمز إليه بـــ** x^{-1} .

ملاحظة

1) **بما أن كل حلقة زمرة فإنها تشمل على الأقل عنصرا هو العنصر الحيادي** 0 **في الزمرة. لاحظ في حالة التعامل مع حلقة واحدية أنه لا مانع أن يكون** $1 = 0$.

2) **يمكن أن نثبت في حلقة تبديلية أن دستور ثنائي الحد محقق، أي أن من أجل كل** a **و** b **من حلقة تبديلية، لدينا:**

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^r . b^{n-r}$$
$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} . b^r .$$

تمرين 1

عين عدد عناصر حلقة واحدية إن كان $1=0$.

تمرين 2

أثبت أن مجموعة العناصر القابلة للقلب في حلقة واحدية تمثل زمرة عند تزويدها بعملية الضرب.

ملاحظة

يمكن الإشارة إلى صحة العلاقة التالية في حلقة واحدية :
$(-1).x = x.(-1) = -x$ **ذلك أن خاصية التوزيع تسمح بكتابة :**

$$x+(-1).x=\left(1+(-1)\right).x=0.x=0$$
$$x+x.(-1)=x.\left(1+(-1)\right)=x.0=0$$

وهو ما يعني أن $(-1).x = x.(-1) = -x$.

أمثلة

1) **مجموعة الأعداد الصحيحة** $\mathbb{Z}$ **المزودة بعمليتي الجمع والضرب حلقة تبديلية وواحدية والعنصران الوحيدان اللذان يقبلان العكس هما** 1 **و** -1 .

2) **مجموعة الأعداد الناطقة** $\mathbb{Q}$ **حلقة تبدلية وواحدية وكل عناصرها تقبل العكس عدا** 0 **. كذلك الأمر في ما يخص مجموعة الأعداد الحقيقية** $\mathbb{R}$ **. كذلك الأمر في ما يخص مجموعة الأعداد العقدية** $\mathbb{C}$ **. تسمى كل مجموعة من هذه المجموعات الثلاث حقلا لأنها تتميز بالخاصية "كل عناصرها تقبل العكس عدا العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع** 0 .

3) هل توجد حلقات منتهية (أي عدد عناصرها منته)؟ نعم. إليك مثالين : المثال الأول هو ذلك الذي أشرنا إليه آنفا عندما تساءلنا عن إمكانية أن تتحقق المساواة $1=0$ في حلقة واحدية. إن $(\{0\},+,.)$ حلقة مكونة من عنصر واحد، تسمى هذه الحلقة الحلقة التافهة أو الحلقة الصفرية.

هناك مثال ثان، وهو $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$ حيث n عدد طبيعي أكبر من 1. كنا أدخلنا في درس الزمر زمرة النسبة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$، حيث أن :

$$\overline{x}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff \overline{x}=\{y\in\mathbb{Z}: y-x\in n\mathbb{Z}\}.$$

يمكن أن نعرف على هذه المجموعة عمليتين داخليتين نرمز إليهما بالجمع والضرب :

$$\forall x\in\mathbb{Z},\ \forall y\in\mathbb{Z}:\ \overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$$
$$\forall x\in\mathbb{Z},\ \forall y\in\mathbb{Z}:\ \overline{x}\,.\,\overline{y}=\overline{x\,.\,y}\,.$$

أثبت أن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$ حلقة. نعلم أن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ زمرة تبديلية. لنتأكد من تجميع الضرب :

$$\begin{aligned}
\forall \overline{x}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \overline{y}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \overline{z}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}:&\\
\overline{x}.(\overline{y}.\overline{z}) &= \overline{x}.(\overline{y.z})\\
&= \overline{x.(y.z)}\\
&= \overline{(x.y.).z}\\
&= \overline{(x.y)}.\overline{z}\\
&= (\overline{x}.\overline{y}).\overline{z}\,.
\end{aligned}$$

ثم نتأكد من خاصية توزيع الضرب بالنسبة للجمع. لدينا :

$$\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ \overline{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ \overline{z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}:$$

$$\begin{aligned}\overline{x}(\overline{y}+\overline{z}) &= \overline{x}\,(\overline{y+z})\\ &= \overline{x(y+z)}\\ &= \overline{x.y+x.z}\\ &= \overline{x.y}+\overline{x.z}\\ &= \overline{x}.\overline{y}+\overline{x}.\overline{z}.\end{aligned}$$

و :

$$\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ \overline{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ \overline{z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}:$$

$$\begin{aligned}(\overline{y}+\overline{z})\overline{x} &= (\overline{y+z}).\overline{x}\\ &= \overline{(y+z).x}\\ &= \overline{y.x+z.x}\\ &= \overline{y.x}+\overline{z.x}\\ &= \overline{y}.\overline{x}+\overline{z}.\overline{x}.\end{aligned}$$

وبالتالي فإن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$ حلقة، وهي منتهية ولدينا، كما نعلم (من درس الزمر) : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\left\{\overline{0},\ \overline{1},\ \dots\ ,\ \overline{n-1}\right\}$.

لاحظ أن هذه الحلقة واحدية وتبديلية.

4) تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية E المعرفة بـــ

$$E=\left\{x\in \mathbb{R}:\ \ x=a+b\sqrt{2},\ a\in \mathbb{Z},\ b\in \mathbb{Z}\right\}$$

حلقة تبديلية عند تزويدها بعمليتي الجمع والضرب المعتادتين.

5) مجموعة كثيرات الحدود تمثل حلقة واحدية وتبديلية عندما تزود بعمليتي الجمع (جمع الدوال) والضرب (ضرب الدوال).

6) مجموعة الدوال المستمرة على مجال (مثلا $[a,b]$) المزودة بعمليتي جمع وضرب الدوال حلقة واحدية تبديلية. وكذلك الحال في ما يخص مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق على مجال ... وكذا مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق مرتين على مجال، الخ.

7) نورد المثال التالي لأهميته رغم أن وقته لم يحن نظرا لأننا لم نتعرض بعد للفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية. تمثل مجموعة التطبيقات الخطية من فضاء شعاعي في نفسه حلقة واحدية بالنسبة لعمليتي جمع التطبيقات وتركيبها، ووحدة الحلقة هي التطبيق المطابق. من السهل التأكد من ذلك. وترجع أهمية هذا المثال إلى كون الحلقة المشار إليها ليست تبديلية ... ذلك أن القارئ يعلم أن عموما $f \circ g \neq g \circ f$ عندما يكون f و g تطبيقان. نذكر أن أسلافنا الرياضياتيين الأوائل الذين انشغلوا بمفهوم الحلقةلم يتناولوا سوى الحلقات التبديلية.

8) مثال آخر لصيق بالسابق : مجموعة المصفوفات 2×2 مثلا حلقة واحدية غير تبديلية بالنسبة لعمليتي جمع المصفوفات وضربها. نذكّر أن كل مصفوفة تمثل تطبيقا خطيا وأن تركيب التطبيقات يقابله ضرب المصفوفات ... وبالتالي فهذا المثال يبدو كأنه إعادة للمثال السابق.

ملاحظة :

1) **لقد بحث الرياضيون في عدد الحلقات التي لها عدد عناصر معين. فوجدوا مثلا أن هناك حلقة واحدة لها عنصر واحد. وأن عدد الحلقات التي لكل منها 4 عناصر هو 11 (أثبت ذلك عام 1964). يوضح الجدول التالي عدد الحلقات حسب عدد العناصر (حتى 31 عنصرا)، علما أن n هو عدد عناصر الحلقة وأن $G(n)$ هو عدد الحلقات التي لها n عنصرا :**

n	$G(n)$	n	$G(n)$	n	$G(n)$	n	$G(n)$
1	**1**	**9**	**11**	**17**	**2**	**25**	**11**
2	**2**	**10**	**4**	**18**	**22**	**26**	**4**
3	**2**	**11**	**2**	**19**	**2**	**27**	**59**
4	**11**	**12**	**22**	**20**	**22**	**28**	**22**
5	**2**	**13**	**2**	**21**	**4**	**29**	**2**
6	**4**	**14**	**4**	**22**	**4**	**30**	**8**
7	**2**	**15**	**4**	**23**	**2**	**31**	**2**
8	**52**	**16**	**390**	**24**	**104**		

لاحظ توزيع عدد الحلقات ... فهو لا يخضع لقانون واضح.

2) **المصطلح : إن كلمة حلقة (العربية) ترجمة عن الكلمة الفرنسية** anneau **والكلمة الأنكليزية** ring. **ويذكر أن كلمة** ring **الأنكليزية هي اختصار (الشطر الثاني) لكلمة** Zahlring **(عدد حلقي) الألمانية التي أتى بها هلبرت في**

بداية الأمر. وفي المصطلح الألماني الحديث صارت كلمة Ring هي السائدة. فلماذا لفظ "الحلقة" في كل ذلك؟ !

لقد أدخل هلبرت هذا المصطلح عند دراسته مجموعات الأعداد ذات الشكل:

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} :\ x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4},\ \ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

فعندما نتمادى في ضرب العدد $\sqrt[3]{2}$ في نفسه أو في $\sqrt[3]{4}$ ($\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{4}$ ثم $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$، ...) فإننا نحصل في الأخير على عدد طبيعي أو جداء عدد طبيعي في واحد من العددين $\sqrt[3]{2}$ أو $\sqrt[3]{4}$ وكأننا ندور في حلقة !!

2.2 تعاريف عناصر خاصة في الحلقات

لنقدم الآن جملة من التعاريف والمفاهيم التي يكثر ذكرها في دراسة الحلقات :

تعريف (العنصر المنتظم أو القابل للاختصار)

نقول عن عنصر $a \neq 0$ في حلقة $(G,+,.)$ إنه منتظم، أو قابل للاختصار، من اليمين إذا تحقق الاستلزام التالي (كلما كان $x.a = 0$) : $x.a = 0 \Leftarrow x = 0$.   كما نقول إنه منتظم من اليسار إذا تحقق الاستلزام التالي كلما كان $a.x = 0$: $a.x = 0 \Leftarrow x = 0$.   في حالة حلقة تبديلية يفقد الوصفان "من اليمين" و "من اليسار" أهميتهما.

مثال

كل العناصر منتظمة في الحلقة $(\mathbb{Z},+,.)$. **والأمر ليس كذلك في الحلقة** $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ **إذ أن** $\bar{2}.\bar{3}=\bar{6}=\bar{0}$، **وهو ما يثبت أن العنصرين** $\bar{2}$ **و** $\bar{3}$ **ليسا منتظمين. لاحظ أن العنصر** $\bar{5}$ **منتظم في هذه الحلقة.**

ملاحظة

إذا كان a **عنصرا منتظما** (من اليمين، مثلا) **فإن الاستلزام التالي قائم :** $x=y \Leftarrow x.a=y.a$ ، **ذلك أن خاصية التوزيع تعطي الاستلزام :**

$$(x-y).a=x.a-y.a=0 \Leftarrow x.a=y.a \,.$$

وانتظام العنصر a **يؤدي إلى الاستلزام :**

$$x-y=0 \Leftarrow (x-y).a=0 \,.$$

وهذا معناه $x=y$.

لاحظ أن العملية التي قمنا بها هي "اختصار" a. **ولذا جاء وصف** a **بأنه قابل للاختصار.**

تعريف (قواسم الصفر)

> **نقول عن عنصر $a \neq 0$ في حلقة $(G,+,.)$ إنه قاسم للصفر من اليمين إذا وجد عنصر $b \neq 0$ في الحلقة $(G,+,.)$ يحقق : $b.a = 0$.**
> **كما نقول إنه إنه قاسم للصفر من اليسار إذا وجد عنصر $b \neq 0$ في الحلقة $(G,+,.)$ يحقق : $a.b = 0$.**
> **في حالة حلقة تبديلية يفقد الوصفان "من اليمين" و "من اليسار" أهميتهما.**

مثال

ليكن $a \neq 0$ عنصرا من الحلقة التبديلية $(\mathbb{Q},+,.)$. إذا حقق عدد b المساواة $b.a = 0$ فإن $b = 0$. إذن فإن مجموعة قواسم الصفر في $\mathbb{Q}$ مجموعة خالية.

الأمر ليس كذلك في الحلقة $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ إذ أن $\bar{0} = \bar{6} = \bar{2}.\bar{3}$. إذن فإن العنصرين $\bar{2}$ و $\bar{3}$ قاسمان للصفر.

ملاحظة

نفرض أن $a \neq 0$ ليس قاسما للصفر في حلقة $(G,+,.)$. هل يمثل a عنصرا منتظما؟ نعم (التأكد من ذلك بسيط). إذن فعناصر حلقة (باستثناء 0) هي إما منتظمة وإما تمثل قواسم للصفر.

تعريف (عنصر عديم القوة)

نقول عن عنصر $a \neq 0$ **في حلقة** $(G,+,.)$ **إنه عديم القوة (أو القدرة) من الرتبة** n **إذا كان** $a^n = 0$ **وكان** n **أصغر عدد يحقق هذه العلاقة.**

مثال

لا يوجد عنصر عديم القوة في الحلقة $(\mathbb{Q},+,.)$ **سوى** 1.

يمثل العنصر $\bar{2}$ **في الحلقة** $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ **عنصرا عديم القوة رتبته** 3 **لأن** $\left(\bar{2}\right)^3 = \overline{2^3} = \bar{8} = \bar{0}$.

ملاحظة

كل عنصر عديم القوة قاسم للصفر إذ أنه إذا كان عنصر $a \neq 0$ **عديم القوة ورتبته** n **فإن العلاقة** $a^n = 0$ **تؤدي إلى** $a.a^{n-1} = 0$. **ومن ثم فإن** a **قاسم للصفر حيث أن** $a^{n-1} \neq 0$ **نظرا لكون الرتبة هي أصغر عدد طبيعي يحقق** $a^n = 0$.

تمرين 3

إليك الحلقة التبديلي $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$.

1) **أثبت أن** $\bar{6}$ **عنصر عديم القوة وعيّن رتبته.**

2) **أثبت أن المجموعة** E **المؤلفة من العناصر العديمة القوى هي** $E = \left\{n.\bar{6},\ \ n = 0,1,...,11\right\}$.

تعريف (القاسم)

> **ليكن** $a \neq 0$ **و** $d \neq 0$ **عنصرين في حلقة** $(G,+,.)$. **نقول إن** d **يقسم** a **من اليسار إذا وجد عنصر** b **بحيث** $a = b.d$. **ونقول إن** d **يقسم** a **من اليمين إذا وجد عنصر** b **بحيث** $a = d.b$.
>
> **في حالة حلقة تبديلية يفقد الوصفان "من اليمين" و "من اليسار" أهميتهما.**

مثال

كل عنصر (عدا 0**) من الحلقة** $(\mathbb{R},+,.)$ **يقسم أي عدد من نفس الحلقة (عدا** 0**).**

يمثل العنصر $\bar{2}$ **في الحلقة** $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ **قاسما لـــ** $\bar{8}$ **لأن** $\bar{2}.\bar{4} = \bar{8}$.

تعريف (العنصر المتساوي القوة)

> **ليكن** $a \neq 0$ **عنصرا من حلقة** $(G,+,.)$. **نقول إن** a **متساوي القوة إذا كان** $a^2 = a$

مثال

في حلقة واحدية عنصر الوحدة متساوي القوة.

ليس هناك أي عنصر متساوي القوة، باستثناء $\bar{1}$ **في الحلقة** $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

في مجموعة الدوال من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ المزودة بقانوني الجمع والتركيب حلقة. إن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $f(x)=|x|$ تمثل عنصرا متساوي القوة إذ أن $f\circ f=f$.

تعريف (العنصر غير القابل للاختزال)

> ليكن $a\neq 0$ عنصرا من حلقة تبديلية واحدية $(G,+,.)$ و $a\neq 1$ إذا كانت القواسم الوحيدة لـــ a هي a ذاتها والوحدة 1 قلنا إن a غير قابل للاختزال.

مثال

العنصر 15 من الحلقة $(\mathbb{Z},+,.)$ يقبل الاختزال لأن $15=3.5$.
لاحظ أن الأعداد الأولية لا تقبل الاختزال.
كل عنصر (عدا 0) من الحلقة $(\mathbb{Q},+,.)$ يقبل الاختزال لأن لدينا مثلا العلاقة $a=(2a).(\frac{1}{2})$ من أجل كل عدد ناطق a .
العنصر $\bar{3}$ في الحلقة $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ لا يقبل الاختزال خلافا لـــ $\bar{8}$ لأن $\bar{8}=\bar{2}.\bar{4}$.

تعريف (العنصر الأولي)

> ليكن $a\neq 0$ عنصرا من حلقة تبديلية واحدية $(G,+,.)$ و $a\neq 1$. نقول عن a إنه أولي إذا كانت أية علاقة من الشكل $a=x.y$ ، حيث $x\neq 1$ و $y\neq 1$، تؤدي إلى أن a يقسم x أو a يقسم y .

مثال

الأعداد الأولية في الحلقة $(\mathbb{Z},+,.)$ عناصر أولية بالمعنى السابق.

يمثل العنصر $\bar{5}$ في الحلقة $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ عنصرا أوليا.

لاحظ أن عنصرا أوليا هو عدد غير قابل للاختزال لكن العكس غير صحيح.

تعريف (عنصران أوليان فيما بينهما)

ليكن $a \neq 0$ $b \neq 0$ عنصرين من حلقة تبديلية واحدية $(G,+,.)$. نقول عن a و b إنهما أوليان فيما بينهما إذا كانت قسمة كل من a و b على نفس العنصر d يؤدي إلى أن d يقبل العكس.

مثال

العددان 8 و 15 أوليان في الحلقة $(\mathbb{Z},+,.)$.

العنصران $\bar{6}$ و $\bar{8}$ في الحلقة $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ غير أوليين فيما بينهما لأن $\bar{2}$ يقسمهما على الرغم من أنه لا يقبل العكس.

تعريف (عنصر مركزي)

ليكن a عنصرا من حلقة $(G,+,.)$. نقول عن a إنه مركزي إذا تحققت العلاقة :

$$\forall x \in G, \quad x.a = a.x.$$

مثال

كل العناصر في حلقة تبديلية عناصر مركزية.

عنصر الوحدة 1 في كل حلقة واحدية عنصر مركزي، وكذا العنصر الحيادي 0.

3.2 أجزاء خاصة من الحلقات :

نقدم فيما يلي تعاريف عينة من أجزاء متميزة في الحلقات.

تعريف (الحلقة الجزئية)

لتكن $(G,+,.)$ **حلقة و** H **جزءا منها. نقول عن** $(H,+,.)$ **إنها حلقة جزئية من** $(G,+,.)$

إن كان $(H,+,.)$ **حلقة واحتوت (في حالة** $(G,+,.)$ **واحدية) على الوحدة** 1.

مثال

$(2\mathbb{Z},+,.)$ **ليست حلقة جزئية من الحلقة** $(\mathbb{Z},+,.)$ **حسب المعنى السابق لأنها لا تشمل الوحدة** 1.

$(\mathbb{Z},+,.)$ **حلقة جزئية من** $(\mathbb{Q},+,.)$ **ومن** $(\mathbb{R},+,.)$.

نلاحظ أن تقاطع حلقات جزئية هو حلقة جزئية. ومن ثم يمكن الإتيان بالتعريف التالي :

تعريف (الحلقة المولدة عن جزء)

إذا كان A جزءا من حلقة فإن الحلقة المولدة عن A هي أصغر حلقة جزئية تحتوي A، أي أن الحلقة المولدة عن A هي تقاطع الحلقات الجزئية التي تحتوي A.

مثال

الحلقة المولدة عن $\mathbb{N}$ في الحلقة $(\mathbb{Q},+,.)$ هي $(\mathbb{Z},+,.)$.

ملاحظة

هناك من المؤلفين من لا يطلب في تعريف الحلقة الجزئية انتماء الوحدة إلى هذه الحلقة في حالة حلقة واحدية. ومهما يكن من أمر فينبغي أن نعرف حين الإجابة عن الأسئلة أو الإطلاع على بعض النتائج أي التعريفين نعتمد. للتأكيد على هذه النقطة، نقول : نعلم أن مجموعة المصفوفات 2×2 تمثل حلقة واحدية غير تبديلية. إذا اعتبرنا المجموعة الجزئية H من المصفوفات ذات الشكل $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ فإننا نجدها تشكل زمرة بالنسبة لعملية الجمع، وأن عملية الضرب داخلية في H. لكن مصفوفة الوحدة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ لا تنتمي إلى H.

ولذا فاعتمادنا للتعريف السابق يجعلنا نقول إن H ليست حلقة جزئية من حلقة المصفوفات 2×2 . أما إذا اعتمدنا التعريف الثاني (أي ذلك الذي لا يتطلب انتماء الوحدة إلى الحلقة الجزئية) فسنقول إن H حلقة جزئية من حلقة المصفوفات 2×2 .

من المهم جدا أن ندرك لماذا يطلب البعض أن تكون الوحدة تنتمي إلى الحلقة الجزئية : لاحظ في هذا المثال أن المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ تمثل عنصرا حياديا بالنسبة للضرب في H . وعليه فإن H حلقة واحدية، لكن وحدتها تختلف عن وحدة حلقة المصفوفات 2×2 ذلك أن :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

تمرين 4

أثبت أن مجموعة العناصر المركزية في حلقة تمثل حلقة (تسمى الحلقة المركزية).

تعريف (المثالي)

لتكن $(G,+,.)$ حلقة و $(I,+)$ زمرة جزئية منها.

* إذا تحققت العلاقة

$$\forall a\in G,\quad a.I\subseteq I$$

فإننا نقول إن I مثالي من اليسار.

* إذا تحققت العلاقة

$$\forall a\in G,\quad I.a\subseteq I$$

فإننا نقول إن I مثالي من اليمين.

في حالة حلقة تبديلية يفقد الوصفان "من اليمين" و "من اليسار" أهميتهما.

مثال

$(2\mathbb{Z},+,.)$ مثالي في الحلقة $(\mathbb{Z},+,.)$.

$(2\mathbb{Z},+,.)$ ليس مثاليا في $(\mathbb{Q},+,.)$.

تعريف (المثالي الرئيسي)

لتكن $(G,+,.)$ حلقة.

* إذا كان I مثاليا من اليسار، نقول إن I مثالي رئيسي من اليسار إذا وجد عنصر a من G بحيث :

$$I=G.a=\{x.a,\quad x\in G\}$$

* إذا كان I مثاليا من اليمين، نقول إن I مثالي رئيسي من اليمين إذا وجد عنصر a من G بحيث :

$$I=a.G=\{a.x,\quad x\in G\}$$

في حالة حلقة تبديلية يفقد الوصفان "من اليمين" و "من اليسار" أهميتهما.

تعريف (المثالي الأعظمي)

لتكن $(G,+,.)$ حلقة.

*** إذا كان I مثاليا من اليسار، نقول إن I مثالي أعظمي من اليسار إذا لم يكن محتويا في أي مثالي من اليسار باستثناء G.**

*** إذا كان I مثاليا من اليمين، نقول إن I مثالي أعظمي من اليمين إذا لم يكن محتويا في أي مثالي من اليمين باستثناء G.**

*** في حالة حلقة تبديلية يفقد الوصفان "من اليمين" و "من اليسار" أهميتهما.**

تعريف (المثالي الأولي)

لتكن $(G,+,.)$ حلقة تبديلية. إذا كان I مثاليا، يكون I مثالي أولي عندما يتحقق الشرطان :

1) $I \neq G$،

2) **إذا كان** $a.b \in I$ **من أجل عنصرين** a **و** b **من** G **فإن** $a \in I$ **أو** $b \in I$.

مثال

كل مثالي أعظمي في حلقة تبديلية مثالي أولي.

4.2 حلقات أخرى وتماثل الحلقات :

تعريف (حلقة كاملة)

لتكن $(G,+,.)$ **حلقة تبديلية فيها أكثر من عنصر. إذا لم تقبل الحلقة أي قاسم للصفر فإننا نقول عنها بأنها كاملة.**

مثال

$(\mathbb{Z},+,.)$ **حلقة كاملة، وكذلك** $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},+,.)$**، خلافا للحلقة** $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z},+,.)$ **إذ نجد فيها مثلا** $\overline{2}.\overline{10}=\overline{0}$ **وهو ما يبن أن** $\overline{2}$ **قاسم للصفر.**

تعريف (حلقة رئيسية)

لتكن $(G,+,.)$ **حلقة كاملة وتبديلية وواحدية. نقول عن هذه الحلقة إنها رئيسية إذا كان كل مثالي فيها مثالي رئيسي.**

تعريف (حلقة الجداء)

لتكن $(G_1,+,.)$ **و** $(G_2,+,.)$ **حلقتين. إن تزويد الجداء** $G_1\times G_2$ **بالقانونين، اللذين نرمز إليهما أيضا برمزي الجمع والضرب :** $\forall (x,y)\in G_1\times G_2,\ \forall (x',y')\in G_1\times G_2 :\ (x,y)+(x',y')=(x+y,x'+y')$ $\forall (x,y)\in G_1\times G_2,\ \forall (x',y')\in G_1\times G_2 :\ (x,y).(x',y')=(x.y,x'.y')$ **يجعل من** $G_1\times G_2$ **حلقة، تسمى حلقة جداء الحلقتين** $(G_1,+,.)$ **و** $(G_2,+,.)$.

تمرين 4

1) تأكد من أن الجداء كما عرّف آنفا يمثل حلقة.

2) نفرض أن الحلقتين $(G_1,+,.)$ و $(G_2,+,.)$ واحديتين. أثبت أن حلقة الجداء واحدية.

3) لتكن $(G_i,\cdot_i)_{i=1,\dots,n}$ n حلقة. وضح كيف يمكن تعريف حلقة الجداء الديكارتي $G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$.

تعريف (حلقة النسبة)

لتكن $(G,+,.)$ حلقة و I مثالي. نعرّف علاقة تكافؤ R على G بـــ

$$xRy \iff x-y\in I\ .$$

* حلقة نسبة G على I، التي نرمز إليها بـــ G/I هي :

$$G/I=\left\{\overline{x},\ x\in G\right\}$$

حيث نعرف صنف التكافؤ $\overline{x}$ من أجل كل $x\in G$ بـــ $\overline{x}=\left\{y\in G: xRy\right\}$.

* نزود G/I بالقانونين الداخليين اللذين نرمز إليهما أيضا برمزي الجمع والضرب:

$$\forall x\in G,\ \ \forall y\in G:\ \overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$$

$$\forall x\in G,\ \ \forall y\in G:\ \overline{x}\,.\,\overline{y}=\overline{x\,.\,y}\ .$$

تمرين 5

1) **تأكد من أن** G/H **زمرة.**

2) **تأكد من أن :** $H = \bar{0} = [x \in G :\ 0Rx]$.

مثال

من أجل n **طبيعي في** $\mathbb{N}^*$ **، نعلم أن** $n\mathbb{Z}$ **مثالي في الحلقة** $(\mathbb{Z},+,.)$ **. وبالتالي يمكن تعريف حلقة النسبة** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **وفق التعريف السابق. لاحظ أن هذه الحلقة هي نفس الحلقة التي أدخلناها في بداية الدرس.**

تعريف (تماثل حلقات)

لتكن $(G_1,+,.)$ **و** $(G_2,+,.)$ **حلقتين. نقول عن التطبيق** $f : G_1 \to G_2$ **إنه تماثل حلقات إذا حقق العلاقتين من أجل كل عنصرين** x **و** y **من** G_1:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(x.y) = f(x).f(y).$$

مثال

إذا كان I مثاليا من حلقة $(G,+,.)$ فإن التطبيق

$$f : G \to G/I$$
$$x \mapsto \overline{x}$$

تماثل حلقات، وهذا حسب تعريف القانونين الداخليين على G/I.
لاحظ أن هذا التطبيق غامر. يسمى هذا التطبيق التماثل القانوني من G نحو G/I.

كل تركيب تماثلي حلقات هو تماثل حلقات (تأكد من ذلك).

تمرين 6

ليكن $f : G_1 \to G_2$ تماثل حلقات.

1) **أثبت أن $f(0)=0$ وأن $f(-x)=-f(x)$ من أجل كل x في G_1.**

2) **أثبت أن $f(G_1)$ حلقة.**

3) **نفرض أن G_1 واحدية. استنتج أن الحلقة $f(G_1)$ واحدية. ما العلاقة بين وحدتي الحلقتين G_1 و G_2 عندما تكون هذه الأخيرة واحدية أيضا والتماثل تشاكلا؟**

ملاحظة

لتكن $(G,+,.)$ حلقة واحدية. لنرمز إلى الوحدة بـــ e بدل 1 وبـــ G' للحلقة المولدة عن $\{e\}$، أي $G'=\{n.e,\ n\in\mathbb{Z}\}$. نعتبر التطبيق $f : \mathbb{Z} \to G'$ الغامر المعرف بـــ $f(n)=n.e$. لاحظ أن هذا

التطبيق تماثل حلقات إذ أن لدينا من أجل كل عددين صحيحين m و n :

$$\begin{aligned} f(m+n) &= (m+n).e \\ &= m.e + n.e \\ &= f(m) + f(n). \\ f(m.n) &= m.n.e \\ &= (m.e).(n.e) \\ &= f(m).f(n). \end{aligned}$$

إذا عرفنا الآن $g:\mathbb{Z}\to G$ بنفس الطريقة التي عرفنا بها التطبيق الغامر $f:\mathbb{Z}\to G'$، أي بـــ $g(n)=n.e$ فيمكن أن يكون g تباينا ويمكن ألا يكون كذلك. إذا لم يكن g تباينا فإنه يوجد بالتأكيد على الأقل عدد $n\neq 0$ يحقق $g(n)=n.e=0$. ومنه يأتي التعريف التالي :

تعريف (مميزة حلقة)

> **نحتفظ بالرموز السابقة.**
>
> * **إذا كان** $g:\mathbb{Z}\to G$ **ليس تباينا فإن أصغر عدد** $n\neq 0$ **يحقق** $g(n)=n.e=0$ **يسمى مميزة** G.
>
> * **إذا كان** $g:\mathbb{Z}\to G$ **تباينا قلنا إن مميزة** G **هي** 0.

ملاحظة

عندما تكون مميزة الحلقة تساوي 0 فإن $\mathbb{Z}$ متشاكلة مع $g(\mathbb{Z})=G'$. ولذا فغالبا ما نطابق في هذه الحالة n الصحيح مع العنصر $n.e$ من G، وهذا يتماشى مع ما ألفناه عند الترميز بـــ 1 لوحدة

الحلقة حيث نكتب مجازا $n.e = n.1 = n$. وعليه يمكن القول أن كل حلقة مميزها معدومة تحتوي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.
عندما تكون مميزة الحلقة تساوي n فإن $g(\mathbb{Z}) = G'$ متشاكلة مع $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. هنا علينا أن نحذر إذ لا يجوز لنا المطابقة بين عناصر الحلقة ومجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ لأن ذلك يؤدي إلى نتائج متناقضة ... كأن نقول أن $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ تحتوي $\mathbb{Z}$. نلاحظ أخيرا أن العلاقة

$$n.x = (n.e).x = 0.x = 0$$

محققة في كل حلقة مميزها $n \neq 0$ ومن أجل كل عنصر x فيها.

ملاحظة

من المهم أن نلاحظ بأن ما قدمناه آنفا من تعاريف لأنواع الحلقات ما هي إلا عينة من الحلقات الخاصة الكثيرة.

3. الحقل (الجسم) :

1.3 تعاريف ونتائج :

تعريف (الحقل، المميزة)

* ليكن $(G,+,.)$ حلقة تبديلية واحدية. نقول إن $(G,+,.)$ حقل إذا كان $1 \neq 0$ وكان كل عنصر يخالف 0 يقبل معكوسا (بالنسبة لعملية الضرب).   * إذا كان $(G,+,.)$ حقلا و H جزءا منه فإننا نقول إن H حقل جزئي من G إذا كان $(H,+,.)$ حقلا.   * مميزة حقل هي مميزته بوصفه حلقة.

ملاحظة

يمكن أن تكون المميزة منعدمة مثل ما هو الحال في $(\mathbb{Q},+,.)$ أو في $(\mathbb{R},+,.)$. وإذا لم تكن منعدمة فإنها تكون عدد أولي.

أمثلة

1) مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المزودة بعمليتي الجمع والضرب حلقة تبديلية وواحدية، لكنها ليست حقلا لأن العنصرين الوحيدين اللذين يقبلان العكس هما 1 و -1.

2) **مجموعة الأعداد الناطقة $(\mathbb{Q},+,.)$ حقل. وكذلك الأمر في ما يخص مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R},+,.)$ ومجموعة الأعداد العقدية $(\mathbb{C},+,.)$. تسمى كل مجموعة من هذه المجموعات الثلاث حقلا لأنها تتميّز بالخاصية "كل عناصرها تقبل العكس عدا العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع 0".**

المجموعة $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+,.)$ حقل يتكوّن من عنصرين هما العنصران الحياديان. أما $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$ حيث n عدد طبيعي أكبر من 2 فيكون حقلا إذا وفقط إذا كان n أوليا (سنبيّن ذلك لاحقا).

3) **تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية E المعرفة بـــ**

$$E=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \ x=a+b\sqrt{2},\ a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z}\right\}$$

حلقة واحدية وتبديلية عند تزويدها بعمليتي الجمع والضرب المعتادتين، لكنها ليست حقلا. دليل ذلك مثلا أن العددين $1+3\sqrt{2}$ و $-\frac{1}{17}+\frac{3}{17}\sqrt{2}$ متعاكسان، لكن $-\frac{1}{17}+\frac{3}{17}\sqrt{2}$ لا ينتمي إلى E.

4) **مجموعة كثيرات الحدود تمثل حلقة واحدية وتبديلية عندما تزود بعمليتي الجمع (جمع الدوال) والضرب (ضرب الدوال)، لكنها لا تمثل حقلا. دليل ذلك، مثلا، أن مقلوب كثير الحدود $1+x^2$ هو التابع $\frac{1}{1+x^2}$ الذي لا يمثل كثير حدود ... الواقع أن هناك عناصر (تختلف عن 0) لا تقبل أصلا عناصر عكسية (كتوابع) مثل كثير الحدود $1+x$.**

5) **مركز حقل يمثل حقلا جزئيا منه.**

تمرين 1

ليكن $(G,+,.)$ حقلا و H جزءا منه.

برهن أن $(H,+,.)$ يكون حقلا جزئيا من $(G,+,.)$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان :

1) $a\in H \;\wedge\; b\in H \;\Rightarrow\; a-b\in H \;\wedge\; a.b\in H$.

2) $0\neq a\in H \;\Rightarrow\; 0\neq a^{-1}\in H$.

(ابدأ بإثبات أن الشرط 1) يكافئ أن $(H,+,.)$ حلقة جزئية من $(G,+,.)$).

تمرين 2

أثبت أن المثاليين الوحيدين في حقل هما الحقل ذاته و $\{0\}$.

نظرية (الحلقة المنتهية والحقل)

كل حلقة واحدية وتبديلية وكاملة ومنتهية $(G,+,.)$ حقل.

البرهان

نعتبر عنصرا $a\neq 0$ من G ولنبيّن أن له معكوسا (وبذلك ينتهي البرهان على أن $(G,+,.)$ حقل). إن التطبيق $f:G\to G$ المعرف بـــ $f(x)=a.x$ تباين لأن المساواة $a.x=a.y$ تستلزم $a.(x-y)=0$. وبما أن الحلقة كاملة و $a\neq 0$ فإن $x-y=0$، أي $x=y$. ومن جهة أخرى، نعلم أن G منتهية. ولذا نستخلص أن f تقابل. ثم إن

الحلقة واحدية، وعليه فتقابل f يؤدي إلى وجود سابقة لـ 1، أي وجود عنصر x يحقق $a.x=1$. وهذا معناه أن لـ a معكوس.

نظرية (الحلقة والحقل والأعداد)

ليكن $2 \le p$. إن القضايا الثلاث التالية متكافئة :

(1) الحلقة $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ كاملة.

(2) العدد p أولي.

(3) الحلقة $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حقل.

البرهان

* نثبت أن $(1)\Leftrightarrow(2)$: نفترض أن $x\in\mathbb{Z}$ و $y\in\mathbb{Z}$ بحيث $\overline{x}.\overline{y}=\overline{0}$ في $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. هذا معناه، حسب تعريف $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$، أن الجداء $x.y$ يُقسَم على p. إذا كان p أوليا فإنه يقسم بالضرورة x أو y، أي أن $\overline{x}=\overline{0}$ أو $\overline{y}=\overline{0}$. هذا يعني أن $(2)\Rightarrow(1)$ لأننا وضحنا الاستلزام

$$\overline{x}.\overline{y}=\overline{0} \;\Rightarrow\; \overline{x}=\overline{0} \;\vee\; \overline{y}=\overline{0}.$$

في ما يخص $(1)\Rightarrow(2)$: نواصل بالقول أنه إذا علمنا أن العدد p يقسم $x.y$ فإن $\overline{x}.\overline{y}=\overline{0}$. وهذا يستلزم، حسب القضية (1) أن $\overline{x}=\overline{0}$ أو $\overline{y}=\overline{0}$، أي أن p يقسم x أو y. وهكذا نكون قد وضحنا بأنه إذا قسم جداء عددين صحيحين على p فإنه يقسم أحدهما.

هذه الخاصية لـــ p تبيّن أنه أولي. ومنه $(1)\Leftarrow(2)$. وفي الخلاصة أثبتنا التكافؤ $(1)\Leftrightarrow(2)$.

* لنثبت أن $(3)\Leftrightarrow(1)$: من الواضح (حسب تعريف الحقل) أن الاستلزام $(3)\Leftarrow(1)$ صحيح.

يكفي في ما يخص الاستلزام $(1)\Leftarrow(3)$ تطبيق النظرية السابقة، إذ أن الحلقة $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ منتهية وكاملة (حسب (1)). وهكذا صار لدينا التكافؤان : $(1)\Leftarrow(2)$ و $(3)\Leftrightarrow(1)$. ومنه المطلوب.

ملاحظة

هناك نتيجة تنص على أن كل حقل منته حقل تبديلي. كما تبيّن دراسة الحقول المنتهية أن عدد عناصر أي حقل منته هو بالضرورة قوة لعدد أولي.

نظرية- تعريف

لتكن $(G,+,.)$ حلقة تبديلية وواحدية، و $d\in G$ عنصرا منها لا يمثل مربعا في G.

توجد حلقة تبديلية وواحدية، نرمز إليها بـــ$G\left[\sqrt{d}\right]$، بحيث تكون G حلقة جزئية من $G\left[\sqrt{d}\right]$ ويكون d مربعا في $G\left[\sqrt{d}\right]$.

نسمي الحلقة $G\left[\sqrt{d}\right]$ امتدادا (أو تمديدا أو توسيعا) تربعيا لـــ G.

ملاحظة

هناك ترميز متداول في ما يخص عناصر $G\left[\sqrt{d}\right]$: نكتب $x = (x,0)$ ثم نلاحظ أن $(x,y) = (x,0)+(y,0) = (x,0)+(0,1).(y,0)$، فإذا استفدنا من المطابقة $x = (x,0)$ و $y = (y,0)$، ووضعنا $\omega = (0,1)$ تجوز لنا كتابة أي عنصر (x,y) من $G\left[\sqrt{d}\right]$ على الشكل :

$$(x,y) = x + \omega.y \ .$$

وهي كتابة وحيدة (حسب تعريفها)، بمعنى أنه إذا كان $(x,y) = x+\omega.y = x'+\omega.y'$ فلا بد أن يكون $x = x'$ و $y = y'$. علينا ألا ننسى العلاقة الهامة $\omega^2 = d$.

مثال

– الاختيار $G = \mathbb{R}$ و $d = -1$ يعطي $\mathbb{R}\left[\sqrt{-1}\right]$، وهو ما ألفنا الإشارة إليه بـــ $\mathbb{C}$ (حلقة الأعداد المركبة).

– الاختيار $G = \mathbb{Z}$ و $d = -1$ يعطي الحلقة $\mathbb{R}\left[\sqrt{-1}\right]$ المسماة حلقة الأعداد الصحيحة لغوس Gauss.

– يسمى $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$ حقل تربيعي من أجل كل عدد ناطق $d \neq 0$. وإذا كان $d > 0$ فإننا نسمي $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$ حقلا تربيعيا حقيقيا. أما إذا كان $d < 0$ فإننا نسمي $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$ حقلا تربيعيا تخيّليا.

تعريف (المرافق والنظيم عنصر)

نحتفظ بتعريف $G\left[\sqrt{d}\right]$ **الوارد آنفا. ونكتب كل عنصر** $z=(x,y)$ **من** $G\left[\sqrt{d}\right]$ **على الشكل** $z=x+\omega.y$.
* **المرافق** $\overline{z}$ **للعنصر** z **هو العنصر من**$\left[\sqrt{d}\right]G$ **المعرف بـــ** $\overline{z}=x-\omega.y$.
* **نظيم العنصر** z **هو العنصر من** G **المعرف بـــ :** $N(z)=z.\overline{z}$.

تمرين 3

تأكد من العلاقات التالية من أجل كل عنصرين z **و** z' **من** $G\left[\sqrt{d}\right]$:

1) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$.

2) $\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$.

3) $N(z)=z.\overline{z}=x^2-d.y^2$.

4) $N(1)=1$.

تمرين 4

عين العناصر القابلة للعكس في حلقة الأعداد الصحيحة لغوس $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]$.

البرهان على النظرية التالية ليس صعبا :

نظرية (بين الحقة والحقل)

ليكن $(G,+,.)$ حقلا تبديليا، و $d \in G$. هناك تكافؤ بين الشرطين:

1) الحلقة $G\left[\sqrt{d}\right]$ حقل.

2) العنصر d ليس مربعا في G.

يؤدي مفهوم الغلق الجبري للحقول دورا أساسيا في البحث عن حلول المعادلات التي تظهر جذور كثيرات الحدود. ولذا نشير بإيجاز إلى تعريفين خاصين بهذا الموضوع.

تعريف (العنصر الجبري)

نقول عن عنصر x إنه جبري بالنسبة لحقل $(G,+,.)$ إن تحققت الشروط الثلاثة التالية :

x ينتمي إلى حقل $(L,+,.)$،

الحقل $(L,+,.)$ يحتوي G،

x جذر لكثير حدود معاملاته في G.

أمثلة

1) **العدد** $2\sqrt{5}+3$ **عدد جبري بالنسبة للحقل** $(\mathbb{Q},+,.)$ **إذ أنه ينتمي إلى** $L=(\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right],+,.)$، **ثم إننا نلاحظ ما يلي** (بوضع $x=2\sqrt{5}+3$): $x^2=29+12\sqrt{5}$، **ومنه** $x^2-29=12\sqrt{5}$. **إذن** :

$$x^4+841-58x^2=\left(x^2-29\right)^2=\left(12\sqrt{5}\right)^2=720 .$$

وبالتالي : $x^4-58x^2+121=0$. **وهكذا يتضح أن العدد** $2\sqrt{5}+3$ **جذر لكثير الحدود** x^4-58x^2+121 **ذي المعاملات الناطقة. وبالتالي فهو عدد جبري. نلاحظ أن اختيار** $L=(\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right],+,.)$ **ليس وحيدا إذ كان بالإمكان أن نأخذ مثلا** $L=(\mathbb{R},+,.)$ **أو** $L=(\mathbb{C},+,.)$، **الخ.**

2) **نشير إلى أنه تم إثبات منذ سنين طويلة أن العدد** $2^{\sqrt{2}}$ **متسام** (**أي أنه غير جبري**)، **وكذلك العدد** e^{π}.

تعريف (**الحقل المغلق جبريا**)

نقول عن حقل $(G,+,.)$ **إنه مغلق جبري إذا قبل كل كثير حدود معاملاته في** G، **ودرجته لا تقل عن** 1، **جذرا في** G.

مثال

1) **الحقول** $(\mathbb{Q},+,.)$، $(\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right],+,.)$ ، $(\mathbb{R},+,.)$ **ليست مغلقة جبريا إذ أن كثير الحدود** f **التالي** (**مثلا**) **لا يقبل جذرا في أيٍّ من هذه الحقول ... رغم أن معاملاته تنتمي إلى كل من تلك الحقول** :

$f(x)=x^2+3$.

2) **الحقل $(\mathbb{C},+,.)$ مغلق جبريا. ذلك ما تنصّ عليه النتيجة المعروفة بـــ "النظرية الأساسية في الجبر" التي تقول بأن كل كثير حدود معاملاته عقدية يقبل عددا من الجذور يساوي درجته (عند مراعاة تضاعف الجذور).**

4. لمحة تاريخية :

يؤدي مفهوم الزمرة الذي يعتبر أحد ركائز البناء الرياضي الحديث، دورا متعدد الأشكال في الفروع الرياضية. ولذلك تعتبر بنية الزمرة إحدى البنى الجبرية الأساسية، وتمثل نظريتها في الوقت الراهن واحدة من النظريات الأكثر تقدما في الجبر.

وقد تطلب تطوير هذه النظرية وتدقيق مفهومها، عدة أجيال من الرياضيين. وهكذا استخدم ألكسندر فندرموند Vandermonde (1735–1796) **وجوزيف لويس لاغرانج** Lagrange (1736–1813) **في عام** 1771 **زمرا من التبديلات لتحديد جذور بعض كثيرات الحدود. ثم جاءت أبحاث كثيرة في هذا السياق، منها أعمال باولو روفيني** Ruffini (1765–1822) **عام** 1799 **ونيلز آبل** Abel (1802–1829) **عام** 1824 **إلى أن لاحت، عام** 1831**، أعمال إفريست غالوا** Galois (1811–1832) **الذي استخدم فيها**

فكرة الزمرة، وأدخل مصطلحها. وانطلاقا من ذلك العهد بدأت نظرية الزمر في التجلّي، سيما في مجال حلّ المعادلات الجبرية.

وتعددت تطبيقات الزمر في فروع الرياضيات (مثل نظرية الدوال ونظرية المعادلات التفاضلية ونظرية الطبولوجيا الجبرية والطبولوجيا العامة حيث يمكن مثلا استخدام الزمر في البرهان على نظرية النقطة الصامدة)، وفي غير الرياضيات (مثل علم البلورات وتصنيف الجسيمات الأولية في الفيزياء، وميكانيك الكم، والنظرية النسبية، ونظرية العُقَد). إنها قائمة طويلة، يصعب تحديدها بدقة، تبيّن مدى تواجد الزمر ومختلف نظرياتها في الفروع العلمية المختلفة.

لقد نشر الجيولوجي وعالم البلورات الروسي إفغراف فيدوروف Fedorov (1853–1919) عام 1891 بحثا في جزءين تحت عنوان "Symmetry of Regular Systems of Figures" (التناظر في أنظمة الأشكال المنتظمة) صنّف فيه جمل النقاط المنتظمة المواقع في الفضاء، علما أن هذا التصنيف يعتبر مسألة من أبرز المسائل التي يهتم بها علم البلورات. ويبلغ عدد زمر فيدوروف في المستوي 17 زمرة. أما في الفضاء فهناك 230 زمرة. ولم يتمكن الرياضيون من تصنيفها الشامل إلا باستخدام نظرية الزمر. ويعدّ هذا التطبيق لنظرية الزمر الأول من نوعه في حقل العلوم الطبيعية. وينظر المختصون إلى مفهوم الزمرة كأداة فعالة لاستكشاف خاصية التناظر في الطبيعة.

أما في ميكانيك الكم فتؤدي نظرية الزمر دورا بارزا إذ يمثّل المختصون في هذا الحقل حالة نظام فيزيائي بنقطة في فضاء شعاعي بعده غير منته. ويتمّ تغيّر النظام في لحظة معينة من حالة إلى حالة أخرى عبر تحويل خطي لتلك النقطة الممثّلة للنظام المعتبر. ولذلك فإن التناظرات التي تتميّز بها هذه المسائل بالغة الأهمية في مثل هذه الدراسات. وكذلك الحال بالنسبة لنظرية تمثيل الزمر بالتحويلات الخطية.

كما ظهرت الزمر بشكل آخر خلال منتصف القرن التاسع عشر في الهندسة عندما تركت الهندسة التقليدية مكانها لهندسات جديدة. وتمّ تأسيس تصنيف الزمر بناء على مفهوم زمرة التحويلات ضمن برنامج عرف ببرنامج إيرلنجن Erlangen الذي وضعه فلكس كلين Klein (1849–1925) عام 1872 حين كان بإيرلنجن. والهدف من هذا البرنامج – الذي سماه صاحبه *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (اعتبارات حول بحوث حديثة خاصة بالهندسة) – هو السعي إلى تقديم حلّ جديد لمسائل الهندسة التي كانت تشغل بال الرياضيين آنذاك. وينبغي ألا ننسى أيضا بأن نظرية الأعداد كانت، هي الأخرى، مصدر تطور لنظرية الزمر وذلك منذ عهد أولر Euler وغوس Gauss حين درسَا خواص بواقي القسمة والأشكال التربيعية.

واتضح خلال النصف الثاني من القرن التاسع عشر أن مختلف الأفكار الخاصة بالزمر تعتمد، في واقع الأمر، على مفهوم واحد رغم

اختلاف حقول استخداماتها. وهكذا ظهر المفهوم المجرّد الحديث للزمرة على أيدي أرثر كايلي Cayley (1821–1895) وفرديناد جورج فروبينوس Frobenius (1849–1917) وولتر فون ديك von Dyck (1856–1934)، إلخ.

وعندما ظهر مؤلف أوتّو شميت Schmidt (1891–1956) عام 1916 في مدينة كياف (الاتحاد السوفيتي سابق) تحت عنوان The abstract theory of groups (النظرية المجردة للزمر) بدأت الزمرة تتخلص من قيود عديدة كانت تحدّ من صلاحياتها في ميادين مختلفة (ومن تلك القيود انتهاء عدد عناصر الزمر المتداولة). فكانت بنية الزمرة إحدى أوائل البنى الجبرية المجردة التي استخدمت كنموذج يحتذى به لدى وضع المفاهيم الجديدة في إطار إرساء بناء الرياضيات على أسس متينة ابتداء من مطلع القرن العشرين.

وفي هذا السياق درس النرويجي بيتر لودويغ مجدل سيلو Sylow (1832–1918) الزمر المنتهية، وكان تلميذه النرويجي ماريوس سوفوس لي Lie (1842–1899) قد عمم دراسة التحويلات وتناول الموضوع المسمى بالزمر المستمرة. ويلاحظ المؤرخون أن الفترة 1830–1933 قد تميزت بمحاولة الانتقال من رياضيات العهود الغابرة إلى الرياضيات التي نعرفها اليوم... وعملت على "إعادة تنظيم البيت" الرياضي والانطلاق الجاد في التجريد.

وهكذا نجد في الجبر مثلا بأن المسائل الجبرية (المعادلات الجبرية، الجمل الخطية، زمر التحويلات، نظرية الأعداد) قد صنفت إلى عدة فئات. ومن ثمّ ظهرت، بصفة تدريجية، بنى جبرية مختلفة : الزمر، الحلقات، الحقول، الفضاءات الشعاعية، الجبور، المقاييس، ... . ومن المهمّ أن نذكّر بأن هذا التوجه قد أدى – بعد اكتشاف عدة هندسات غير أقليدية (هندسة لوبتشفسكي، هندسة ريمان، ...) – إلى انتهاج سبل جديدة تتميّز بالدقة في مجال التحليل بالرياضي وجعلت كبير رياضيي القرن العشرين ديفد هلبرت Hilbert (1862–1943) يراجع مسلمات أقليدس في نهاية القرن التاسع عشر. وأفضت هذه البحوث إلى انقسام الهندسة إلى قسمين رئيسيين هما: الهندسة الجبرية والهندسة التفاضلية.

لنتناول الآن عناصر من الجانب التاريخي للحلقة والحقل (الجسم). ولنبدأ بكلمة وجيزة حول الحقول ثم نعود إلى الحلقات. كان مفهوم الحقل قد استعمل ضمنيا من قبل نيل هنريك آبل Abel (1802–1829) وإفرسيت غالوا Galois (1811–1832) في أعمالهما الخاصة بحل المعادلات. وفي عام 1871 كان ريتشارد ديدكيند Dedekind (1831–1916) قد سمى حقلا كل مجموعة أعداد حقيقية أو عقدية تكون عليها العمليات الحسابية الأربع داخلية.

أما ليوبولد كونيكر Kronecker (1823–1891) فقد سمى عام 1881 "ساحة الناطقية" "domain of rationality" ما نسميه الآن حقل كثيرات الحدود. وفي عام 1893 قدم هنريش فيبر Weber (1842–1913) أول تعريف واضح للحقل بالمفهوم المجرد. ولم يكن في ذهن غالوا لفظ "الحقل"، ورغم ذلك فهو يعتبر أول رياضي ارتبط اسمه بنظرية الزمر ونظرية الحقول. نلاحظ أن ما يعرف بنظرية غالوا هي تسمية لم تكن معروفة في عهده. والرياضي الذي طوّر العلاقة بين الزمر والحقول هو إميل أرتين Artin (1898–1962) خلال الفترة 1928–1942.

وقد اُستعمِل مفهوم الحقل أول مرة للبرهان على أن ليس هناك دستور عام يعطي جذور كثيرات الحدود الحقيقية ذات الدرجات الأكبر من 4. والمفهوم الأساسي التي تتضمنه نظرية غالوا هو الامتداد (أو التوسيع) الجبري لحقل معطى. والموضوع مرتبط بما يسمى بـــ"الغلق الجبري" و"الأعداد الجبرية" (سنعرف ذلك لاحقا). والملاحظ في هذا السياق أن الحقول المنتهية تؤدي دورا أساسيا في نظرية التشفير والتعمية. أما الحقول ذات المميزة 2 فتستخدم في علم الحاسوب المبني على نظام العد الثنائي. وهي تدرس كحالة خاصة من فئة الحقول المنتهية.

دعنا نتحدث الآن عن الحلقات. نلاحظ أن كل كتاب في الجبر المجرد يعطي تعريف الحلقة. فماذا يبرر إدخال هذا المفهوم؟ من أهداف

هذا المفهوم تعميم فكرة العمليات الحسابية على مجموعات ليست بالضرورة مجوعات أعداد.

وما حفّز على دراسة مثل هذه المواضيع هي نظرية فيرما Fermat (1601–1665) التي تقول بأن المعادلة $x^n + y^n = z^n$ لا تقبل حلولا طبيعية x ، y ، z من أجل أي عدد طبيعي $n>2$. ومن المعلوم أنها نتيجة أثبتت في مطلع التسعينيات من القرن العشرين من قبل الرياضي الأنكليزي أندريو وايلز Wiles (1953–..). ولا تفوتنا هنا الإشارة إلى بعض الحالات الخاصة التي تم البرهان عليها في وقت مبكّر :

– أثبتها فيرما من أجل $n=4$ حوالي 1640.

– أثبتها أولر Euler (1707–1783) من أجل $n=3$ عام 1753.

– أثبتها لوجندر Legendre (1752–1833) وديركلت Dirichlet (1805–1859) من أجل $n=5$ عام 1825.

– أثبتها ديركلت من أجل $n=14$ عام 1832.

– أثبتها لامي Lamé (1795–1870) من أجل $n=7$ عام 1839.

وكان أولر قد تعمّق في دراسة الموضوع لدى معالجة الحالة $n=3$ محاولا تطبيق ذلك على الحلقة المؤلفة من العناصر ذات الشكل $x+y\sqrt{-3}$ عندما يمسح العددان x و y حلقة الأعداد الصحيحة. لكنه لم يفلح في محاولته. وفي عام 1847 أعلن لامي أنه برهن على نظرية

فيرما وقدّم مختصرا لذلك البرهان. وعندئذ رأى ليوفيل Liouville (1809–1882) أن البرهان مرتبط بوحدانية التفكيك إلى عناصر أولية (مثلما نفكك عددا إلى أعداد أولية). غير أن التفكيك المشار إليه ليس وحيدا. ومن المعلوم أن كوشي Cauchy (1789–1857) كان من المؤيدين لفكرة لامي.

وحتى نفهم ما كان يجري في تلك الحِقْبة، وندرك الأفكار التي كانت في أذهان الرياضيين نذكر أن المجموعة المؤلفة من العناصر ذات الشكل $x+y\sqrt{-3}$، عندما يمسح العددان x و y حلقة الأعداد الصحيحة، تمثل حلقة (علما أن $\sqrt{-3}=i.\sqrt{3}$). وفيها نعرّف العدد الأولي بشكل مشابه لما نعرفه في مجموعة الأعداد الطبيعية، فهو عدد لا يقسمه عدد من الشكل $x+y\sqrt{-3}$ سوى العدد ذاته والأعداد التي لها أعداد عكسية (بالنسبة لعملية الضرب). على سبيل المثال، نلاحظ أن العددين $1+\sqrt{-3}$ و $1-\sqrt{-3}$ أوليان وأن العدد 4 يمكن تفكيكه إلى عوامل أولية بكيفيتين مختلفتين هما $4=2.2$ و $4=\left(1+\sqrt{-3}\right).\left(1-\sqrt{-3}\right)$. وهذا مشكل لا يطرح في مجموعة الأعداد الصحيحة.

كما أن غوس Gauss (1777–1855) أثبت أن المشكل لا يطرح في الحلقة المؤلفة من العناصر ذات الشكل $x+y\sqrt{-1}$ عندما يمسح العددان x و y حلقة الأعداد الصحيحة. واستغل هذه النتيجة وأخرى

مماثلة لها لإثبات نظرية فيرما في حالة $n=3$. وكان كومر Kummer (1893–1810) قد أثبت عام 1844 أن وحدانية التفكيك غير صحيحة في الحالة العامة. وأدخل عام 1846 مفهوم المثالي في مجموعة الأعداد العقدية. ويقال أن كومر أدخل هذا المفهوم من أجل إثبات نظرية فيرما، لكن بعض المؤرخين ينفون ذلك.

ومهما يكن من أمر فقد استغل كومر هذا المفهوم لإثبات تلك النظرية في حالة $n<100$ باستثناء القيم 37 ، 59 ، 67 ، 74. ولحد ذلك الوقت ظل التفكير يدور في فلك الأعداد. وعندما ركز ديدكيند على خواص "مثالي الأعداد العقدية" استطاع أن يستخلص تعريف "المثالي" فميّزه بخواصه الذي صارت متداولة اليوم، منها تلك القائلة إن ضرب أي عنصر منه في عنصر من الحلقة التي تحتويه يجعل الجداء المحصل عليه عنصرا من المثالي. كما أدخل ديدكيند عام 1871 لفظ module (مقياس) الذي يمكن وصفه بمفهومه الحالي بأنه "فضاء شعاعيا" على حلقة (بدل حقل). نلاحظ أن المقياس كان في البداية يعبّر عن زمرة جزئية من الزمرة الجمعية في حلقة.

ومن ثم عمّم مفهوم الأعداد الأولية إلى المثاليات الأولية من قبل ديدكيند عام 1871. نذكّر أن المثالي الأولي هو مثالي يحتوي على جداء كل عنصرين إذا وفقط إذا كان يشمل أحد عاملي الجداء)، أي :

لتكن $(G,+,.)$ حلقة تبديلية. إذا كان I مثاليا نقول إن I مثالي أولي عندما تحقق الشرطان التاليان :

1) $I \neq G$ ،

2) إذا كان $a.b \in I$ من أجل عنصرين a و b من G فإن $a \in I$ أو $b \in I$.

مثال ذلك : مجموعة كل الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على عدد أولي تمثل مثاليا أوليا.

وهكذا فإن هذا الاتجاه الذي جعل الرياضيين ينظرون إلى المثاليات بدل النظر إلى عناصر الحلقة يعتبر تحوّلا هاما في تطوير نظرية الحلقات.

وفي عام 1882 أصدر ديدكيند وفيبر بحثا هاما أوضح أمرين : فقد بيّن كيف نربط بين الأفكار الهندسية بحلقات كثيرات الحدود وعمم استخدام مفهوم "المقياس". ومن المهم أن نلاحظ بأن حلقات كثيرات الحدود وحلقات الأعداد في ذلك الوقت كانت قد درست بإسهاب. ورغم ذلك كان علينا الانتظار قرابة 40 سنة لرؤية نظرية الحلقات التبديلية تكتب في قالب مسلماتي وتدمج تلك الحلقات ونظرياتها في قالب واحد.

والملاحظ أن المصطلحات الأولى التي كانت تشير إلى الحلقة هي order (ترتيب) و order-modul (مقياس مرتب)، وهو مصطلح أتى به كرونيكر، ولازال مستخدما إلى اليوم في نظرية الأعداد الجبرية. وكما أشرنا في السابق فإن مصطلح "الحلقة" يعود إلى هلبرت Hilbert (1862–1943) الذي استخدمه في دراسة نظرية اللامتغير والمثاليات في حلقات كثيرات الحدود فأثبت بذلك نتيجته الأساسية عام 1893. وكان غوردن Gordan (1837–1912) قد درس ابتداء من عام 1868 حالات خاصة من نتيجة هلبرت المشار إليها آنفا. ويذكر أنه عندما شاهد غوردن برهان هلبرت صاح قائلا "هذه ليست رياضيات بل لاهوتية".

لا بد من الإشارة إلى أن تفكيك عدد صحيح إلى جداء قوى أعداد أولية له ما يماثله في نظرية الحلقات حيث تستبدل الأعداد الأولية بالمثاليات الأولية. غير أن قوى الأعداد الأولية لا تعوض بقوى المثاليات الأولية، بل تعوض بما يسمى بالمثاليات "الابتدائية" وهي المقدمة في التعريف التالي :

تعريف (المثالي الابتدائي)

لتكن $(G,+,.)$ حلقة تبديلية وواحدية. إذا كان I من $(G,+,.)$ مثاليا نقول إن I مثالي ابتدائي عندما يتحقق الاستلزام التالي :

$$\begin{cases} a.b \in I \\ a \notin I \end{cases} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad b^n \in I .$$

ملاحظة

لاحظ أن المثالي الأولي مثالي ابتدائي ... والمثالي الابتدائي يكون أوليا إن كان العدد n الوارد في الاستلزام يساوي 1. لقد أدخل مفهوم المثالي الابتدائي عام 1905 من قبل البولندي (الأصل) إمانويل لاسكر Lasker (1868–1941) في سياق تناوله لحلقات كثيرات الحدود. والطريف أن لاسكر كان بطل العالم في لعبة الشطرنج خلال الفترة 1894–1921. وقد صرنا اليوم نسمي حلقة لاسكر كل حلقة تبديلية يكون فيها كل مثالي ممثلا كتقاطع عدد منته من المثاليات الابتدائية. وقد برهن لاسكر وجود تفكيك مثالي إلى مثاليات ابتدائية، لكن خواص الوحدانية لهذا التفكيك لم تثبت إلا في عام 1915.

وأشار بعض المؤرخين إلى أن نصوصا جبرية مثل ما نجده في كتابات فيبر (عام 1895) تحتوي على مسلمات خاصة بالزمر مثل ما نجده في مؤلفات اليوم. لكننا لا نجد لدى فيبر (مثلا) مسلمات خاصة بالحلقات ... ولم تتطور صياغة تلك المسلمات حتى سنة 1920. وكانت تلك القفزة قد ظهرت في عمل إيمي نوثر Noether (1882–1935) والألماني فولغانغ كرول Krull (1899–1971). وكانت نوثر قد قدمت عملا جبارا في هذا السياق، حوالي عام 1921، حيث وحدت الرؤية في موضوعي حلقات كثيرات الحدود وحلقات الأعداد تحت عنوان الحلقات التبديلية المجردة.

وهكذا كانت نظرية الحلقات التبديلية تتطور بسرعة انطلاقا من حلقات الأعداد وكثيرات الحدود. أما الحلقات غير التبديلية فلم تعرف نفس التطور في ذلك الوقت ... وعند اكتشافها كان قد قيل إنها تمثل تقدما باهرا في الرياضيات التطبيقية.

ومن جهة أخرى، كان كايلي Cayley (1821–1895) قد أدخل المصفوفات عام 1850 بقانوني الجمع والضرب المعروفين في مجموعة المصفوفات. ولاحظ شارل بيرس Pierce (1839– 1914) عام 1870 أن المسلمات التي نعرفها وألفنا بها اليوم محققة من أجل المصفوفات المربعة. ويعتبر الرياضي الأسكتلندي جوزف ودربورن Wedderburn (1882–1948) من أكبر الرياضيين المساهمين في تطوير نظرية الحلقات غير التبديلية.

الفصل الثالث

مجموعات الأعداد

يعتبر موضوع مجموعات الأعداد معروفا لدى الطالب المفتش، وله إلمام كافٍ به، غير أن ذلك لا يمنع من التذكير ببعض أساسيات هذه المجموعات. وقد ارتأينا أن الجانب الذي يستحق التأكيد عليه هنا أكثر من غيره هو كيفية إنشاء المجموعات الخمس للأعداد حتى إن كانت محتويات برامج المستوى المتوسط لا تهتم كثيرا بهذا الجانب. وعلى كل حال فالبرنامج الخاص بتكوين المفتشين يشير إلى موضوع الإنشاء إشارات صريحة لكل مجموعة من مجموعات الأعداد. ولهذا ركزنا على هذه المفاهيم.

والواقع أن ضيق الوقت (48 ساعة لمادة الجبر) لا يكفي لاستعراض كل المفاهيم المشار إليها في البرنامج، ولذا تركنا عددا منها كمادة للبحوث يقوم بإنجازها الطلبة خلال السنة. من تلك المواضيع نذكر : الموافقة، نظم العد، القواسم والمضاعفات، علاقة الترتيب في $\mathbb{Q}$، الجذور التربيعية والنونية لعدد حقيقي، تطبيقات الأعداد المركبة في ميادين مختلفة، الخ.

كما أشار البرنامج إلى وجوب الاهتمام بالجانب التاريخي وتطور مفهوم العدد. من أجل ذلك اخترنا موضوع الأعداد الأولية وفصلنا فيه بعض القضايا ذات الطابع الثقافي وأدرجناه ضمن باب الأعداد الطبيعية. ثم إننا ذيلنا الفصل بعرض تاريخي حول تطور مفهوم العدد زمنيا حتى وصلنا إلى ابتكار الآلة الحاسبة.

1. الأعداد الطبيعية :

1.1 إنشاء مجموعة الأعداد الطبيعية:

هناك عدة طرق لإنشاء مجموعة الأعداد الطبيعية، ولا شك أن القارئ سيجد فيها بعض التعقيد إذا ما قورنت هذه الطرق ببساطة الأعداد الطبيعية.

طريقة إنشاء فون نومان von Neumann

تقوم هذه الطريقة على القواعد التالية المبنية على نظرية المجموعات :

1) المجموعة الخالية عدد طبيعي، نرمز له بـــ 0.

2) إذا كان N عددا طبيعيا فإن المجموعة $N \cup \{N\}$ عدد طبيعي يسمى "تالي" العدد N.

3) ننشئ جميع الأعداد الطبيعية وفق القاعدتين السابقتين.

مثال

لدينا، حسب القاعدتين الأوليين :

* العدد التالي لــ 0 هو $1 = \{0\} = 0 \cup \{0\}$.

* العدد التالي لــ 1 هو $2 = \{0,1\} = \{0\} \cup \{1\} = 1 \cup \{1\}$

* العدد التالي لــ 2 هو

$3 = \{0,1,2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = 2 \cup \{2\}$ ... وهكذا دواليك.

طريقة إنشاء بيانو Peano

يضع بيانو خمسة مسلمات لإنشاء مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، وهي

1) هناك عدد طبيعي نسميه الصفر ونرمز له بـــ 0

2) لكل عدد طبيعي n عدد تالٍ نرمز له بـــ $s(n)$.

3) لا يوجد عدد طبيعي يقبل 0 كعدد تالٍ.

4) إذا كان لعددين طبيعيين نفس العدد التالي فإن العددين متساويين.

5) إذا كانت هناك مجموعة أعداد طبيعية تشمل 0 وتشمل العدد التالي لكل عنصر منها فإن هذه المجموعة هي $\mathbb{N}$.

ملاحظة

تسمح المسلمة الأولى بتأكيد عدم خلو مجموعة العداد الطبيعية. كما توضح المسلمة الثالثة وجود أول عنصر في المجموعة. أما المسلمة الخامسة فلضمان قيام مبدأ التراجع الذي أشرنا إليه في الفصل الأول.

طريقة إنشاء ديدكيند – بيانو Didekind-Peano

نعتبر الثلاثية (E,x,s) المتكوّنة من مجموعة E وعنصر x من E وتطبيق $s:E \to E$، ونفرض أن :

1) $x \notin s(E)$.

2) التطبيق s تباين.

3) إذا كانت مجموعة جزئية F من E تشمل x وقارة عبر s (أي $s(F) \subset F$) فإن $E = F$.

المجموعة E هي التي ستؤدي دور مجموعة العداد الطبيعية. أما s فهو التطبيق الذي يلحق بكل عدد طبيعي العدد الذي يليه. ومن هنا نفهم الشرط الثاني، وندرك أن وضع $x = 0$ يقتضي قيام الشرط الثاني.

طريقة أخرى لإنشاء مجموعة الأعداد الطبيعية (مبنية على علاقة الترتيب)

لتكن E مجموعة غير خالية تحقق المسلمات التالية :

1) E مجموعة مرتبة، وكل جزء غير خال من E يقبل أصغر عنصر، (نستنتج من ذلك أن لــ E أصغر عنصر m).

2) لا تقبل E أكبر عنصر.

3) كل عنصر $a \in E$ يختلف عن m له عدد سابق (سالف).

ملاحظة

المسلمة الأولى تستلزم أن كل مجموعة جزئية $\{x, y\}$ من E يقبل أصغر عنصر. وبالتالي فإن E مرتبة كليا.

المسلمة الثانية تستلزم أن كل عنصر من E يقبل عنصرا تاليًا.

المسلمة الثالثة تستلزم أن كل جزء غير خال محدود من الأعلى يقبل عنصرا أكبر.

وبالتالي نستخلص أن جملة المسلمات الثلاث السابقة تقتضي :

E مرتبة كليا.

لـــ E أصغر عنصر m ولا يقبل أكبر عنصر.

لكل عنصر من E عدد تالٍ ولكل عنصر من E يختلف عن m عنصر سالف.

لكل جزء غير خال أصغر عنصر، ولكل جزء غير محدود محدود من الأعلى عنصر أكبر.

نثبت بعد ذلك أن هناك "تشاكلا" بالنسبة لبنية الترتيب بين كل المجموعات التي تحقق المسلمات السابقة. ولذا لا نفرّق بينها ونسميها مجموعة العداد الطبيعية !

تعريف (الجمع في مجموعة الأعداد الطبيعية)

نعرف عملية الجمع "+"

$$+:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بالتراجع كما يلي :

$$\forall a\in\mathbb{N},\qquad a+0=a$$
$$\forall(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad a+s(b)=s(a+b)$$

حيث يرمز $s(n)$ للعدد التالي لـــ n.

ملاحظة

* يمكن إثبات بأن عملية الجمع تجميعية وتبديلية ولها عنصر محايد هو 0.

* يمكن التعبير عن الخاصية

$$\forall(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad a+s(b)=s(a+b)$$

باستعمال العدد السالف (والعدد التالي) حيث يرمز $b-1$ للعدد السالف لـــ b، فنكتب

$$\forall(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{*},\quad a+b=s(a+(b-1))\,.$$

* كما يمكن إثبات بأن العملية منتظمة، أي أن المساواة $a+b=a+c$ تستلزم $b=c$. للتأكد من ذلك نتبع نمط البرهان بالتراجع : نلاحظ أنه إذا كان $a=0$ فالقضية بديهية. لنفرض الآن صحة القضية من أجل $a\in\mathbb{N}$ ونثبت أنها محققة من أجل العدد التالي لــ a. من الواضح أن العلاقة $b+s(a)=c+s(a)$ تكافئ $s(b+a)=s(c+a)$. ومنه (وحدانية العدد التالي) $b+a=c+a$. وهذا ما يعطي، حسب فرض التراجع، $b=c$.

* يمكن تعريف الترتيب المألوف على $\mathbb{N}$ بالقول : يكون $a\leq b$ إذا وجد عدد $c\in\mathbb{N}$ بحيث $a+c=b$.

تعريف (الضرب في مجموعة الأعداد الطبيعية)

نعرّف عملية الجمع "." أو "×"

$$\times : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ **بالتراجع كما يلي :**

$$\forall a \in \mathbb{N}, \qquad a\times 0 = 0$$
$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \quad a\times s(b) = (a\times b) + a$$

حيث يرمز $s(n)$ **للعدد التالي لـــ** n.

ملاحظة

يمكن إثبات بأن عملية الجمع تجميعية وتبديلية، ولها عنصر محايد هو 1. **لتعيين العنصر المحايد يكفي اختيار** $b = 0$ **في العلاقة**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \quad a\times s(b) = (a\times b) + a.$$

فنحصل على

$$\forall a \in \mathbb{N}, \; a\times 1 = a\times 0 + a = 0 + a = a.$$

2.1 الأعداد الأولية:

من منا لا يعرف الأعداد الأولية؟ من المعلوم أن قائمتها لا تنتهي أبدا. فهي تنبت في حقل الأعداد مثل الأعشاب الضارة، ولا يمكن التنبؤ بمواقعها لكونها لا تخضع في الظاهر إلا للصدفة. والأصح أن نقول أننا لم نكتشف بعد جملة القوانين التي تتحكم في ظهور هذه الأعداد الملفتة للانتباه. وكان القدماء قد بحثوا عنها يدويا فعينوا منها الكثير. ثم لجأ

الباحثون إلى الآلة لمواصلة اكتشاف خواص هذه الأعداد. فاستعملوا مئات الحاسوبات التي تعمل ليلا نهارا على إيجاد المزيد من الأعداد الأولية سعيا لمعرفة المزيد من الخواص. وقد قارن بعضهم دور الأعداد الأولية في عالم الأعداد بالعناصر الكيميائية في عالم الكيمياء وموادها المختلفة. وهكذا كُتبت ولازالت تكتب آلاف الصفحات من الرياضيات المعقدة حول هذه الأعداد.

وللتعرف على الأعداد الأولية هناك الطريقة التقليدية المسماة "غربال إيراتوستين"Ératosthène (حوالي قرنين قبل الميلاد) الذي يتمثل في كتابة قائمة الأعداد الطبيعية بالترتيب المتزايد ثم نقوم بشطب مضاعفات الأعداد الأولية المتوالية. وما لم يشطب في آخر المطاف هي الأعداد الأولية. لقد ظلت هذه الطريقة الأكثر فعالية لتحديد الأعداد الأولية الصغير (الأصغر من مليون مثلا)، لكنها تفقد فعاليتها العملية رغم صحتها النظرية كلما تعاملنا مع الأعداد الكبيرة.

أثبت ذلك العلامة الإغريقي أقليدس Euclide (القرن الثالث قبل الميلاد). كيف ذلك؟ ليكن n عددا طبيعيا أوليا و P جداء الأعداد الأولية الأصغر من n. إن العدد P+1 عدد أولي أكبر تماما من n. أثبت ذلك ... ذلك ما أثبته أقليدس ليبين أن كل عدد أولي له عدد أولي أكبر منه تماما. وكان برهان أقليدس، فيما يبدو، أول برهان بالخلف قدّم في

الرياضيات. ومنه نستنتج أن عدد الأعداد الأولية غير منته. تلك هي إحدى خاصيات الأعداد الأولية. وهناك أيضا خاصيتان أخريان :

– تفكيك عدد طبيعي الى جداء أعداد أولية تفكيك وحيد.

– ليست هناك صيغة جبرية لتمثيل عدد أولي.

هناك ملاحظة لابد منها في هذا المقام : هل 1 عدد أولي أم لا؟ من الممكن ضمه إلى مجموعة العداد الأولية، إلا أن الرياضيين فضلوا اعتباره عددا غير أولي لأن هذا الاتفاق يسهّل صياغة العديد من النظريات. ولولا ذلك لملئت الكتب التي تقدم نتائج حول الأعداد الأولية بعبارات مثل "باستثناء العدد 1".

والقضية المركزية لدي الباحثين في موضوع الأعداد الأولية هي تحديد مواقعها في سلسلة الأعداد الطبيعية. ومن المعلوم أن هناك مخمّنة ريمان Riemann (1826–1866) تدلي بمعلومات دقيقة حول هذا التوزيع، لكن حتى هذه النتيجة الجزئية استعصت على كل من أراد البرهان عليها.

وقد أثبت الرياضيون خلال القرن التاسع عشر بأن عدد الأعداد الأولية الأصغر من n يجاور العدد $\frac{n}{\ln n}$ وهذا عندما يكون n كبيرا بكفاية. ومن ثم، تمّ استنتاج بأن إحدى القيم التقريبية للعدد الأولي من الرتبة n هي $n\ln n$. وقبل ذلك أثبت فيرما Fermat (1601–

1665) عدة نتائج تتعلق بالأعداد الأولية في القرن السابع عشر، منها على سبيل المثال أن كل عدد أولي من الشكل $4n+1$ يساوي مجموعا وحيدا لمربعين. مثال ذلك : من أجل $n=3$ فإن

$$4n+1=13=9+4=3^2+2^2 .$$

ويروى أن فيرما كـــان على اتصال برجل الدين الفرنسي مرين مرسان Marin Mersenne (1588–1648) الذي خمّن بأن العدد 2^n+1 يكون أوليا كلما كان n مساويا لقوة لـــ 2 (مثل 2، 4، 8، 16، ...). وبعد مضي قرن من الزمن أثبت أولر Euler (1707–1783) أن هذه النتيجة خاطئة من أجل $n=32=2^5$ إذ أن

$$2^{32}+1=4294967297 =641\times6700417 .$$

أما الآن فنعرفت عشرات الأمثلة المضادة لمخمنة مارسان وفيرما.

تدعى الأعداد من الشكل 2^n+1 أعداد فيرما. أما الأعداد ذات الشكل 2^n-1 فتسمى أعداد مارسان. ومن المعلوم أن أعداد مرسان ليست أولية عندما يكون الأس غير أولي. وحتى إن كان الأس n أوليا فهذا لا يستلزم بالضرورة أن عدد مارسان أولي. مثال ذلك : أثبت سنة 1536 أن

$$2^{11}-1=2047 =23\times89 .$$

ومن المعلوم أن أعداد مارسان هي التي وفّرت ولا زالت الى اليوم توفر أكبر عدد من الأعداد الأولية.

كان بيترو كاتالدي Pietro Cataldi (1548–1626) قد أثبت عام 1588 أن العددين

$$2^{17}-1=131071 \text{ و } 2^{19}-1=524287$$

أوليان. وأضاف أن الأمر كذلك فيما يتعلق بأعداد مرســـان الخاصة بالأسس 23، 29، 31، 37. لكنه ظهر فيما بعد أن هناك عدة أخطاء في هذا القول : ذلك أن فيرما برهن (حوالي عام 1640) على النتيجة التالية:

إذا كان p أوليا يختلف عن 2 فإن جميع القواسم الأولية لعدد مرسان 2^p-1 تكتب على الشكل $2kp+1$.

ومن ثم تبيّن أن كاتالدي أخطأ في أوليّة عدد مرسان ذي الأس 23، فهو يقسم على العامل $2kp+1$ من أجل $k=1$ (أي على 47). كما أن عدد مرسان الموافق للأس 37 ليس أوليا لأنه يقسم على العامل $2kp+1$ حيث $k=6$. وفي عام 1738 أثبت أولر أن كاتالدي أخطأ أيضا في حالة الأس 29 حيث اتضح أن 233 قاسم لعدد مرسان ذي الأس 29. وأكد أولر صحة قولة كاتالدي فيما يخص الأس 31.

وقبل أوروبا عرف الأعداد الأولية الإغريق كما أسلفنا، وكذلك الصينيون الذين جاؤوا بفرضية تقول أنه

إذا كان p عددا أوليا فإن 2^p-2 يقبل القسمة على p.

توجد على شبكة الإنترنت العديد من المواقع التي تهتم بالأعداد الأولية وتقدم البعض منها ويصل بعضها الى قائمة تضم أزيد من 6000 عدد أولي

وقد بحث الرياضيون في العديد من أشكال الأعداد الأولية كما فعل وودال Woodall وتم الاهتمام بالأعداد التي تدخل فيها جداء الأعداد الطبيعية المتوالية أو جداء الأعداد الأولية المتوالية وربط بعضهم أعدادا أولية فيما بينها مثلما فعلت صوفي جرمان Germain (1816–1893). وتسائل البعض عن الفروق بين الأعداد الأولية، وعرف البعض الآخر أنواعا كثيرة من الإعداد الأولية مثل الأعداد التوائم حيث نقول عن عددين أوليين أنهما توأمان إذا كان الفرق بينهما يساوي 2. مثال ذلك الثنائيات (3,5) ، (5,7) ، (11,13)، (17,19). هناك مخمّنة تنص على أن عدد الأعداد التوائم غير منته. وليس هذا فحسب بل أنشغل الرياضيون بأنماط آخر من الأعداد الأولية مثل تلك التي لا تظهر فيها سوى الوحدة، إنها الأعداد الواحدية التكرارية Repunits. لنتعرف على الأعداد من هذا القبيل، وكذا الأعداد المتناظرة palindromes والمقتصدة économes والمبذرة prodigues !

3.1 الأعداد الأولية الواحدية التكرارية:

هي الأعداد المتكونة في تمثيلها العشري من العدد 1 لا غير. مثال ذلك : 1، 11، 111، 1111، الخ. نلاحظ أن العدد 11 أولي لكن 111 ليس أوليا، وكذلك الحال بالنسبة لـ 1111 و 11111. ويمكن البرهان على أن العدد الواحدي المتناظر المشكل من 1، مكررا 19 مرة، عدد أولي؛ وكذلك الحال بالنسبة للعدد 111...111 ("1" مكرر 23 مرة). فما هي الأعداد الأولية من بين الأعداد الواحدية التكرارية؟

إن الإجابة عن هذا السؤال ليست بسيطة ولا نعرف اليوم أية قواعد قوية تسمح لنا بتحديد مثل هذه الأعداد بصفة تلقائية.

من بين القواعد المكتشفة بهذا الخصوص نذكر :

- حتى يكون عدد واحدي تكراري أوليا لا بد أن يكون عدد أرقامه عددا أوليا. ذلك أنه إذا كان m يقسم n فإن 111...11 ("1" مكرر m مرة) يقسم 111...11 ("1" مكرر n مرة). البرهان على هذه القضية يستند الى المساواة

$$100010001\times111=111111111111$$

- لا يمكن أن يكون عدد واحدي تكراري مربعَ عدد طبيعي.
- أكتشف مؤخرا على أنه لا يمكن أن يكون عدد واحدي تكراري مكعب عدد طبيعي، ولا قوة 5 لعدد طبيعي. ولحد الآن لا نعلم ماذا يحدث بالنسبة للقوى الأخرى غير 2، 3، 5.

- بيّنت الحسابات أن العدد الواحدي التكراري 111...111 ("1" مكرر n مرة) أولي من أجل القيم التالية لـ n : 2، 19، 23، 317، 1031. أكتشف العددان الأخيران عامي 1978 (من قبل هيوغ وليمز Hugh Williams) و 1986 (من قبل هيرفي دوبنر Harvey Dubner). وليست هناك قيم أخرى لـ n أصغر من 30000 تعطي أعدادا واحدية تكرارية أولية.
- عندما يتجاوز عدد الأرقام 30000 تصبح الحسابات طويلة جدا، ولذا فنحن نجهل ماذا يحدث. ومن ثم لا ندري ما إذا كانت مجموعة هذه الأعداد منتهية أو غير منتهية.
- الغريب أننا نستطيع في العديد من الحالات التأكيد بأن هذا العدد أو ذاك من فئة الأعداد الواحدية التكراية عدد غير أولي دون التمكن من كتابته على شكل جداء عوامل أولية. نشير الى أن المهتمين تمكنوا اليوم من تحديد العوامل الأولية لهذه الأعداد عندما لا يتجاوز عدد أرقامها 157.

4.1 الأعداد الأولية المتناظرة:

الأعداد الواحدية التكرارية هي نوع خاص من فئة الأعداد "المتناظرة"، أي الأعداد التي تقرأها من اليمين الى اليسار أو من اليسار الى اليمين فتحصل على نفس العــدد. مثال ذلك : 212، 3223.

من الواضح أن العدد المتناظر الوحيد المشكل من رقمين هو 11. وباستثناء هذا العدد لا يوجد أي عدد متناظر وأولي يتشكل من عدد زوجي من الأرقام. يمكن إثبات ذلك بفضل مقياس قابلية القسمة على 11، وهي القاعدة التي تنص على أن كل عدد يكون الفرق بين مجموع أرقامه ذات الرتب الزوجية ومجموع أرقامه ذات الرتب الفردية منعدما هو عدد يقبل القسمة على 11.

ورغم ذلك يوجد 15 عددا متناظرا وأوليا ذات 3 أرقام وهي :

101	131	151	181	191
313	353	373	383	727
757	787	797	919	929

لاحظ أن رقم مئات كل من هذه الأرقام ليس زوجيا... وإلا كانت زوجية وبالتالي غير أولية. أما عدد الأعداد المتناظرة الأولية ذات 5 أرقام فيبلغ 93 عددا. وهناك 668 عددا متناظرا أوليا ذات 7 أرقام.

ومن بين هذه الأعداد نجد

1878781   1879781
1880881   1881881

ومن المعلوم أن الأعداد المتناظرة الأولية المكونة من 11 و 13 و 15 رقما قد تم حسابها من قبل مارتن إيبل Martin Eibl. أما تلك التي لها 17 رقما فقد حددها في منصف 1998 كارلوس ريفيرا Carlos Rivera. ولا بد أن نشير هنا الى أن هذا الأخير من هواة الأعداد الأولية على الرغم من أنه يعمل في صناعة الخزف بالمكسيك.
وقد لاحظ هذا الهاوي العديد من خواص الأعداد المتناظرة الأولية، نذكر من بينها :

$$101 + 131 + 151 = 383$$
$$30103 + 30203 + 30403 = 90709$$

$$\begin{array}{r} 1000000000000002109952599012000000000000001 + \\ 1000000000000002110000000112000000000000001 + \\ 1000000000000002110025200112000000000000001 = \\ 3000000000000006329977799236000000000000003 \end{array}$$

تعطي المساواة الأخيرة مجموع 3 أعداد متناظرة أولية ذات 43 رقما ... مع العلم أن المجموع ذاته متناظر وأولي.
ولم يكتف الهاوي المكسيكي بهذه العلاقات بل راح يبحث في علاقات مماثلة في هذا النوع من الأعداد فوجد هذه العلاقة بين أعداد تضم 191 رقما (وهو نفسه عدد متناظر أولي) :

$$1(0)_{87}132298010892231(0)_{87}1+1(0)_{87}132300858003231(0)_{87}1+$$
$$1(0)_{87}132301111103231(0)_{87}1=$$
$$3(0)_{87}396899979998693(0)_{87}3$$

مع الإشارة الى أن $(0)_n$ يرمز إلى تكرار"0" بصفة متتالية n مرة.

ومضى ريفيرا في ملاحظاته فكتب العدد المتناظر الأولي 71317 بثلاثة أشكال مختلفة كمجموع أعداد أولية متتالية. كما اكتشف هذا الهاوي خصوصيات أخرى لا يسع هنا المجال لذكرها.

5.1 الأعداد المقتصدة والأعداد المبذرة:

لقد أدخلت مؤخرا مصطلحات جديدة في عالم الأعداد الطبيعية. فلقد اقترح برناردو ريكامان سنتوس Bernardo Recamàn Santos تسمية عددا متساوي الأرقام équidigital إذا كان عدد عوامله الأولية يساوي عدد أرقام كتابته في النظام العشري. مثال ذلك العدد 162 حيث أن $162=7.3^4$. ومن ثم أطلق مصطلح عدد مقتصد على كل عدد لا يتطلب تفكيكه الى عوامل أولية أكثر من عدد أرقام كتابته في النظام العشري. والعدد المبذّر هو العدد غير المقتصد. مثال ذلك : العدد 1024 عدد مقتصد لأن $1024=2^{10}$. أما العدد 34 فهو مبذّر لأن $34=2\times17$.

2. الأعداد الصحيحة :

1.2 إنشاء مجموعة الأعداد الصحيحة:

تعريف (علاقة وعملية)

نعرّف على $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

1) **العلاقة** R **التالية**

$$\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4,\ (a,b)R(c,d)\Leftrightarrow a+d=c+b\ .$$

2) **عملية الجمع "+" التالية**

$$\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4,\ (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\ .$$

نظرية (علاقة تكافؤ)

العلاقة R **المعرفة آنفا على** $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ **علاقة تكافؤ.**

البرهان

من الواضح أنها انعكاسية ومتناظرة. للتأكد من أنها متعدية نعتبر ستة أعداد طبيعية $(a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{N}^6$ بحيث $(a,b)R(c,d)$ و $(c,d)R(e,f)$. والمطلوب التحقق من أن $(a,b)R(e,f)$. لدينا إذن : $a+d=c+b$ و $c+f=e+d$. والمطلوب هو $a+f=e+b$.

ننطلق من $a+d=c+b$ **ونضيف** f **إلى الطرفين ونستفيد من خاصيتي التجميع والتبديل والعلاقة** $c+f=e+d$ **فيتضح تكافؤ العلاقات المتوالية الآتية :**

$$
\begin{aligned}
(a+d)+f&=(c+b)+f\\
a+(d+f)&=c+(b+f)\\
a+(f+d)&=c+(f+b)\\
(a+f)+d&=(c+f)+b\\
(a+f)+d&=(e+d)+b\\
(a+f)+d&=e+(d+b)\\
(a+f)+d&=e+(b+d)\\
(a+f)+d&=(e+b)+d
\end{aligned}
$$

وقد كنا أثبتنا عند تقديم مجموعة العداد الطبيعية أن العلاقة $(a+f)+d=(e+b)+d$ **تستلزم** $a+f=e+b$.

ملاحظة

يمكن إثبات بأن عملية الجمع تجميعية وتبديلية، ولها عنصر محايد هو $(0,0)$.

نظرية (الزمرة $\mathbb{Z}$)

إن مجموعة النسبة $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}/R,+)$ **المزودة بعملية الجمع زمرة تبديلية، تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة ونرمز لها بـــ** $\mathbb{Z}$.

البرهان : متروك للقارئ.

ملاحظة

1) **يتبيّن إذن بأن**

$$\forall (a,b)\in \mathbb{N}^2,\ \overline{(a,b)} = \{(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : (x,y)R(a,b)\}$$
$$= \{(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : (x+b = a+y\}.$$

$$\overline{(0,0)} = \{(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : (x,y)R(0,0)\}$$
$$= \{(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x = y\}$$
$$= \{(x,x) :\ x\in \mathbb{N}\}.$$

$$\forall (a,b,c,d)\in \mathbb{N}^4,\ \overline{(a,b)}+\overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)}$$

حيث يرمز $\overline{(a,b)}$ **لصنف تكافؤ** (a,b).

2) **العنصر المحايد هو** $\overline{(0,0)}$.

3) **العنصر النظير لـــ** $\overline{(a,b)}$ **هو** $\overline{(b,a)}$**، ذلك ما يتضح من الملاحظتين السابقتين.**

نظرية ($\mathbb{N}$ **جزء من** $\mathbb{Z}$ **)**

إن التطبيق $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ **المعرف بـــ** $\varphi(n) = \overline{(0,n)}$ **متباين ويحقق العلاقة**

$$\forall (n,m)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad \varphi(n+m) = \varphi(n)+\varphi(m)\ .$$

ملاحظة

يتيح تباين φ **مطابقة** n **بـــ** $\varphi(n)$، **أي وضع** $n \equiv \overline{(0,n)}$. **وبما أن نظير** $\overline{(0,n)}$ **هو** $\overline{(n,0)}$ **فإننا نضع** $-n \equiv \overline{(n,0)}$.

نلاحظ في هذه الحالة أننا نستطيع كتابة

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \overline{(n,m)} = \overline{(n,0)} + \overline{(0,m)} = -n + m \ .$$

2.2 من خواص مجموعة الأعداد الصحيحة:

نظرية (مساواة بيزو Bezout)

> **ليكن** a **و** b **عددين صحيحين و** d **قاسمهما الأكبر. يوجد عددان صحيحان** u **و** v **يحققان المساواة** $au + bv = d$.

البرهان

نضع $A = \mathbb{N}^* \cap \{ax + by , (x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$. **إن** A **مجموعة جزئية عير خالية من** $\mathbb{N}$. **ولذا فهي تقبل عنصرا أصغر** d، **علما أنه غير منعدم لأن** $0 \notin A$. **إذن يوجد** $(u,v) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **بحيث** $au + bv = d$.

لنتأكد من أن d **يمثل القاسم المشترك الأكبر للعددين** a **و** b.

باستخدام القسمة الأقليدية نكتب $a = a'd + r$ **حيث** $r < d$ ، **علما أن** $au + bv = d$. **وبالتالي**

$$a = a'(au + bv) + r$$

ومنه

$$r = a(1 - a'u) + b(-v)$$

نلاحظ أن شكل هذه الكتابة هي $r = ax + by$ حيث $x = 1 - a'u \in \mathbb{Z}$ و $y = -v \in \mathbb{Z}$. وبالتالي، فإما $r = 0$، وإما $r \in A$. ولما كان d هو أصغر عنصر في A و $r < d$ فهذا يستلزم أن $r \notin A$. ومنه $r = 0$. وهذا يعني أن d يقسم a. وبنفس الطريقة نثبت أن d يقسم b. وهكذا فخلاصة القول إن d يقسم a و b.

أخيرا نتأكد من أن d يمثل أكبر قواسم a و b. لنفرض أن هناك قاسما مشتركا c لـــ a و b. إن العلاقة $au + bv = d$ تبيّن بأن c يقسم أيضا d. وهكذا فإن $c \leq d$. ومنه يأتي المطلوب.

نظرية (نظرية بيزو)

ليكن a و b عددين صحيحين. تقبل المعادلة $ax + by = 1$ حلا $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا كان a و b أوليين فيما بينهما.

البرهان

نفرض أن العددين a و b أوليان. عندئذ نطبق النظرية السابقة باعتبار $d = 1$ فيتبين أن هناك حلا $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ للمعادلة $ax + by = 1$.

نفرض الآن أن للمعادلة $ax + by = 1$ حلا $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. ونفرض أن c قاسم مشترك لـــ a و b. عندئذ نلاحظ أن المساواة

$ax+by=1$ تستلزم أن c يقسم 1. إذن $c=1$. وهذا يعني أن a و b أوليان فيما بينهما.

ملاحظة

نفرض أن $(x_0,y_0)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حل للمعادلة $ax+by=d$. ومن ثم نستنتج أن الثنائيات $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعرفة بـــ

$$\begin{cases} x = x_0 - k\dfrac{b}{d}, \\ y = y_0 + k\dfrac{a}{d}, \end{cases}$$

حيث $k\in\mathbb{Z}$، تمثل جميع حلول المعادلة المعطاة. تأكد من ذلك.

نظرية (نظرية بيزو المعممة)

ليكن a و b عددين صحيحين قاسمهما المشترك الأكبر d و $c\in\mathbb{Z}^*$.   تقبل المعادلة $ax+by=c$ حلا $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا كان c مضاعفا لـــ d.

البرهان

إذا كان c مضاعفا لـــ d فإنه يوجد $\alpha\in\mathbb{Z}$ بحيث $c=\alpha d$. ونحن نعلم أن للمعادلة $ax+by=d$ حلا $(x_0,y_0)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. وبالتالي فإن $(\alpha x_0,\alpha y_0)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حل للمعادلة $ax+by=c$. نفرض الآن بأن المعادلة $ax+by=c$ تقبل حلا $(x_1,y_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$، ولنثبت أن c

مضاعف لـ d. يتبين من القسمة الأقليدية أنه يوجد $d > r$ بحيث $c = \beta d + r$. ونحن نعلم أن للمعادلة $ax + by = d$ حلا $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. نستنتج من كل ذلك أن $a(x_1 - \beta x_0) + b(y_1 - \beta y_0) = r$. ولما كان d يقسم العددين a و b فإن المساواة السابقة تبيّن أنه يقسم أيضا r. لكن $d > r$. ومنه فإن $r = 0$. وهذا يعني أن $c = \beta d$، أي أن c مضاعف لـ d.

نظرية (غوس Gauss)

> لتكن a و b و c أعدادا صحيحة.
> إذا قسم a الجداء bc وكان أوليا مع b فإنه يقسم c.

البرهان

a يقسم الجداء bc، ولذا يوجد α بحيث $bc = \alpha a$. لنفرض أن a أولي مع b. تؤدي مساواة بيزو إلى وجود $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ بحيث $ax + by = 1$. ومنه $acx + bcy = c$. وبالتالي $acx + (\alpha a)y = c$. وهكذا يتبيّن أن a يقسم الطرف الأول من المساواة السابقة، وعليه فهو يقسم الطرف الثاني، أي أنه يقسم c.

3. الأعداد الناطقة :

1.3 إنشاء مجموعة الأعداد الناطقة:

إليك طريقة من طرق إنشاء مجموعة الأعداد الناطقة، وستلاحظ أن مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تؤدي فيها دورا رئيسيا. وما سنحصل عليه هو الحقل $\mathbb{Q}$ الممثل لحقل الكسور المبني على $\mathbb{Z}$ ... علما أن طريقة الإنشاء تظل قائمة حتى عندما نعوّض $\mathbb{Z}$ بأية حلقة تامة (كاملة) أخرى A فنحصل عندئذ على حقل الكسور المبني على A.

من السهل التأكد من أن العلاقة R المعرفة على $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ بـــ

$$(a,b)R(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

علاقة تكافؤ.

تعريف (مجموعة الأعداد الناطقة)

تسمى مجموعة النسبة $\left(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\right)/R$ مجموعة الأعداد الناطقة، ونرمز لها بـــ $\mathbb{Q}$.

إذا كان $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ فإننا نرمز بـــ $\dfrac{a}{b}$ لصنف التكافؤ $\overline{(a,b)}$.

لنعرف الآن عمليتي الجمع والضرب على $\mathbb{Q}$.

تعريف (الجمع والضرب)

نعرّف عمليتي الجمع + والضرب × على $\mathbb{Q}$ كما يلي :

$$\forall(a,b)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*,\ \forall(c,d)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \ :$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

ملاحظة

من المهم أن نتأكد من التعريف المقدم لا يرتبط باختيار صنف التكافؤ، بمعنى أنه إذا كان

$$\forall(a',b')\in \overline{(a,b)},\ \forall(c,d)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \ :$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd+b'c}{b'd},$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a'c}{b'd}.$$

من أجل ذلك نلاحظ أن تعريف علاقة التكافؤ يبيّن أن $(a',b')\in \overline{(a,b)}$ تعني أن $ab'=ba'$. ومن ثمّ فعملية تعويض بسيطة تؤدي إلى المطلوب. نستطيع بعد ذلك التأكد بسهولة من صحة النتيجة التالية :

نظرية-تعريف (حقل الأعداد الناطقة)

إن الثلاثية $(\mathbb{Q},+,\times)$ تمثل حقلا تبديليا، يسمى حقل الأعداد الناطقة، أو حقل كسور الحلقة $\mathbb{Z}$.

ملاحظة

1) **يمكن إثبات أن الحقل $(\mathbb{Q},+,\times)$ هو أصغر حقل (بالنسبة للاحتواء) يحتوي الحلقة $\mathbb{Z}$.**

2) **نستنتج من تعريف عمليتي الجمع والضرب أن**

$\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall c \in \mathbb{Z}\ :$

$$\begin{aligned}
\overline{(a,1)} + \overline{(c,1)} &= \frac{a}{1} + \frac{c}{1} \\
&= \frac{a.1 + 1.c}{1.1} \\
&= \frac{a+c}{1} \\
&= \overline{(a+c,1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{(a,1)} \times \overline{(c,1)} &= \frac{a}{1} \times \frac{c}{1} \\
&= \frac{ac}{1.1} \\
&= \frac{ac}{1} \\
&= \overline{(ac,1)}.
\end{aligned}$$

ومنه فإن إدخال التطبيق

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$$
$$a\mapsto\overline{(a,1)}=\frac{a}{1}$$

يسمح بملاحظة أن

$$f(a)+f(c)=f(a+c),$$
$$f(a)\times f(c)=f(a.c).$$

وهذا يعني أن f تماثل حلقات.

ومن جهة أخرى فإن المساواة $f(a)=f(c)$ تستلتزم أن $a.1=c.1$، أي $a=c$. وبالتالي فإن التطبيق $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ تماثل متباين. ومن ثمّ نستطيع (وهذا ما نفعل دوما) مطابقة $\mathbb{Z}$ و $f(\mathbb{Z})$، أي اعتبار $\mathbb{Z}$ جزءا من $\mathbb{Q}$ بوضع

$$\forall a\in\mathbb{Z},\quad \mathbb{Q}\ni\overline{(a,1)}\equiv a\in\mathbb{Z}\,.$$

3) يمكن إثبات أن كل عدد ناطق يكتب على شكل وحيد $\frac{a}{b}$ حيث $a\in\mathbb{Z}$ و $b\in\mathbb{Z}^*$ و $\mathrm{pgcd}(a,b)=1$.

يمكن العودة للنظرية التالية بعد الإطلاع على مجموعة الأعداد الحقيقية. وهي تعتبر من أهم النظريات التي تربط مجموعتي الأعداد الناطقة والأعداد الحقيقية :

نظرية (كثافة مجموعة الأعداد الناطقة في مجموعة الأعداد الحقيقية)

إن مجموعة الأعداد الناطقة كثيفة في مجموعة الأعداد الحقيقية.

ماذا يعني ذلك؟ يعني أن كل عدد حقيقي يمثل نهاية لمتتالية مؤلفة من الأعداد الناطقة. لرؤية ذلك نعتبر عددا حقيقيا x كيفيا، وتعريف المتتالية (x_n) كما يلي $x_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$ حيث يرمز $[10^n x]$ للجزء الصحيح للعدد $10^n x$. نلاحظ بعد ذلك أن $x_n \in \mathbb{Q}$ وأن

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \alpha_n < 1: \quad |x - x_n| = \frac{\alpha_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}.$$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

4. الأعداد الحقيقية :

هناك عدة طرق لإنشاء مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ سنحاول في ما يلي الإشارة إلى بعض منها.

1.4 إنشاء بمتتاليات الأعداد الناطقة:

من الممكن أن ننظر لكل عدد حقيقي x على أنه عدد (أو كمية) نستطيع تمثيلها عشريا على النحو $x = n + 0.d_1 d_2 d_3 ...$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ و (d_i) أرقام يمكنها أن تأخذ أي عدد طبيعي محصور بين 0 و 9 شريطة ألا تنتهي المتتالية (d_i) بالعدد 9 مكررا عددا غير منته من المرات. وهذا يعني أن العدد x هو الذي يحقق المتباينتين التاليتين من أجل كل عدد طبيعي k :

.

$$n+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^2}+...+\frac{d_k}{10^k}\le x<n+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^2}+...+\frac{d_k}{10^k}+\frac{1}{10^k}$$

لاحظ أن ذلك يؤدي بالضرورة إلى أن

$$\lim_{k\to+\infty}\left(n+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^2}+...+\frac{d_k}{10^k}\right)=x$$

علما أن

$$n+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^2}+...+\frac{d_k}{10^k}\in\mathbb{Q}\ .$$

غير أن هذا الكلام لا يعدّ من الناحية المنطقية إنشاء لمجموعة لا نعرف عنها شيئا ... فنحن في تقديمنا السابق اعتبرنا "عددا حقيقيا x" قبل تعريفه. ولذلك سنوجز هنا فكرة إنشاء مجموعة الأعداد الحقيقية عبر المتتاليات : نعتبر مجموعة المتتاليات الكوشية في $\mathbb{Q}$، أي تلك المتتاليات $(u_n)\in\mathbb{Q}$ بحيث

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall m>N,\forall n>N,\ |u_m-u_n|<\varepsilon$$

علما أن $\varepsilon\in\mathbb{Q}$ وليس $\varepsilon\in\mathbb{R}$ لأننا لا نعرف بعد مجموعة الأعداد الحقيقية.

– سؤال : هل كل المتتاليات من هذا القبيل متقاربة، أي تقبل نهاية في $\mathbb{Q}$؟

– الجواب : لا.

– المسألة المطروحة : إنشاء مجموعة تكون فيها كل متتالية كوشية في $\mathbb{Q}$ متقاربة (نهايتها في تلك المجموعة الجديدة).

المجموعة المطلوبة هي مجموعة الأعداد الحقيقية. ويتمثل إنشاؤها في اعتبار العلاقة R على E، مجموعة المتتاليات الكوشية في $\mathbb{Q}$:

$$(u_n)R(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty}|u_n - v_n| = 0 .$$

ثم نثبت أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ على E. وبعد ذلك نعتبر مجموعة النسبة E/R ونضع تعريفا : كل عنصر من هذه المجموعة، أي كل صنف تكافؤ يسمى عددا حقيقيا. بمعنى أننا نضع $\mathbb{R} = E/R$. تأتي بعد ذلك التعاريف والخواص المألوفة في $\mathbb{R}$ حيث نعرّف عمليتي الجمع والضرب، ونثبت أن مجموعة الأعداد الحقيقية حقل. كما نعرّف علاقة ترتيب، ثم نثبت أنها منسجمة مع عمليتي الجمع والضرب، وأن المجموعة تتمتع بخاصية الحد الأعلى.

2.4 الإنشاء بمقاطع ديدكيند Dedekind

لقد لاحظ ديدكيند أن كل عدد ناطق r يقسم مجموعة الأعداد الناطقة إلى قسمين : هما $A_r = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$ و $B_r = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq r\}$. وقد سمّي الثنائية (A_r, B_r) مقطعا لـــ $\mathbb{Q}$. ثم لاحظ أن العدد $\sqrt{2}$ مثلا يقسم أيضا مجموعة الأعداد الناطقة إلى قسمين $A_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$ و $B_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\}$. ونتيجة لذلك جاءت فكرة اعتبار مجموعة الأعداد الحقيقية على أنها مجموعة مقاطع مجموعة الأعداد الناطقة.

تعريف (المقطع)

نسمي مقطعا لديدكيند في حقل الأعداد الناطقة كل ثنائية مجموعتين جزئيتين غير خاليتين A و B بحيث : $A \cap B = \varnothing,$ $A \cup B = \mathbb{Q},$ $\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a < b.$

ملاحظة

الملاحظ أن من أجل كل عدد $r \in \mathbb{Q}$ هناك مقطعان لمجموعة الأعداد الناطقة هما (A_r, B_r) و (A_r', B_r') المعرفان بـــ

$$B_r = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq r\} \text{ و } A_r = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$$

$$B_r' = \{x \in \mathbb{Q} : x > r\} \text{ و } A_r' = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq r\}.$$

ولتفادي ازدواجية المقطع من أجل كل عدد ناطق تمّ اللجوء إلى التعريف التالي :

تعريف (المقطع، مرة أخرى)

نسمي مقطعا في حقل الأعداد الناطقة كل جزء A من $\mathbb{Q}$ يحقق :   1) $A \neq \mathbb{Q}$ 2) $\forall a \in A, \quad a' < a \Rightarrow a' \in A$ 3) **لا يقبل A عنصرا أكبر.**

ملاحظة

1) من بين فوائد هذا التعريف أننا نستطيع أن نرفق كل عدد ناطق r بالمقطع $A_r = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$ من خلال تطبيق متباين. وبعد ذلك نعرّف مجموعة الأعداد الحقيقية بأنها مجموعة المقاطع المشار إليها سابقا، أي أن $\mathbb{R} = \{A_r : r \in \mathbb{Q}\}$.

يسمح التطبيق

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ r &\mapsto A_r \end{aligned}$$

المعرف آنفا بمطابقة $\mathbb{Q}$ بجزء من $\mathbb{R}$، وهو $f(\mathbb{Q})$، بمعنى أننا نضع $r \equiv A_r$ من أجل كل $r \in \mathbb{Q}$.

2) علاقة الترتيب

نزود مجموعة المقاطع بعلاقة الاحتواء. عندئذ تكون هذه المجموعة مرتبة ترتيبا كليا تحقق بوجه خاص "خاصية الحد الأعلى" التي تنص على أن كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة من الأعلى تقبل حدا أعلى.

3) عملية الجمع على $\mathbb{R}$: ليكن A و B مقطعين من $\mathbb{Q}$، أي عنصرين من $\mathbb{R}$. نعرف $A+B$ بـــ : $c \in A+B$ إذا وفقط إذا وجد $a \in A$ و $b \in B$ بحيث $c = a+b$.

4) بداية تعريف عملية الضرب على $\mathbb{R}$: ليكن A و B مقطعين من $\mathbb{Q}$، أي عنصرين من $\mathbb{R}$. نعرف $A \times B$ بـــ : $c \in A \times B$ إذا وفقط إذا وجد $a \in A \cap \mathbb{Q}^+$ و $b \in B \cap \mathbb{Q}^+$ بحيث $c \leq a \times b$. وهكذا دواليك في استخراج مختلف خواص مجموعة الأعداد الحقيقية.

5. الأعداد المركبة :

يمكن القول إن الرياضيين نالوا مبتغاهم بعد إنشاء مجموعة الأعداد المركبة، خلافا لما حدث لهم عند إنشاء مختلف المجموعات العددية السابقة الذكر. لقد نال الرياضيون مبتغاهم لأن المعادلات التي تكتب على شكل كثيرات حدود صارت طيّعة في حقل مجموعة الأعداد المركبة، ولا تخفي حلولا. وعلى سبيل المثال فإن معادلة من الدرجة الثانية يمكن ألا تتمتع بحل في مجموعة الأعداد الحقيقية لكن عدد حلولها في مجموعة الأعداد المركبة هو دائما 2. وبصفة عامة فكل معادلة من الدرجة n لها n حلا (تلك هي "نظرية الجبر الأساسية").

ويعتبر حقل الأعداد المركبة امتدادا لحقل الأعداد الحقيقية، لكن هذا الأخير له علاقة ترتيب تنسجم مع عمليتيه الداخليتين، بينما لا نجد هذه الخاصية في مجموعة الأعداد المركبة. وهذا أحد عيوب الأعداد المركبة. ومن ميزات هذه الأعداد أنها تتمتع بخواص جبرية وتحليلية ثرية جعلت تطبيقها ينتشر في مختلف فروع الرياضيات والفيزياء... فلا يمكن تصوّر دراسة النسبية أو ميكانيكا الكم دون استخدام الأعداد المركبة.

ومن المعلوم أن الأعداد المركبة ظهرت خلال القرن 16م على أيدي الرياضيين الإيطاليين ... وحاجتهم في ذلك كانت البحث عن حلول المعادلات ذات الدرجة الثالثة. ثم تطور الربط بين الأعداد المركبة والهندسة بدءا من القرن 19م.

وكما نعلم فإن المعادلة البسيطة من الدرجة الثانية $x^2+1=0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ لأن إضافة -1 لطرفيها يؤدي إلى المساواة $x^2=-1$ ، ونحن نعلم أنه لا يوجد عدد حقيقي $x\in\mathbb{R}$ يحقق هذه المساواة.

من الطرق الشهيرة في إنشاء مجموعة الأعداد المركبة نذكر :

1.5 إنشاء باستخدام الجداء الديكارتي $\mathbb{R}^2$

نعتبر المجموعة $\mathbb{R}^2$ ونزودها بالعمليتين التاليتين، الجمع والضرب :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(c,d)\in\mathbb{R}^2,$$
$$(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$$
$$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

من السهل إثبات أن $\mathbb{R}^2$ المزود بهاتين العمليتين حقل تبديلي (العنصر الحيادي للجمع هو $(0,0)$ والعنصر الحيادي للضرب هو $(1,0)$) وأن التطبيق

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$$
$$x\mapsto(x,0)$$

تماثل حقول وأنه تباين، وهو ما يسمح بالمطابقة بين $\mathbb{R}$ و $f(\mathbb{R})$ ، أننا نضع

$$\mathbb{R}\ni x\equiv(x,0)\in\mathbb{R}^2\ .$$

ثم إننا نضع $i=(0,1)$ فيصبح

$$a+ib=(a,0)+(0,1)b=(a,b)\ .$$

وبذلك تصبح مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ هي

$$\mathbb{C}=\left\{a+ib:(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}\ .$$

2.5 إنشاء باستخدام كثيرات الحدود :

نعتبر مجموعة كثيرات الحدود على $\mathbb{R}$، التي نرمز لها عادة بـــ $\mathbb{R}[X]$، ثم نعرّف علاقة التكافؤ R التالية على $\mathbb{R}[X]$: من أجل كثيري حدود P و Q، يكون PRQ إذا وفقط إذا كان باقي قسمة P على كثير الحدود X^2+1 الأقليدية يساوي باقي قسمة Q على كثير الحدود X^2+1 الأقليدية. يمكن اعتبار مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حقلا متشاكلا مع حقل النسبة $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$. يكفي اعتبار عدد مركب $a+ib$، وإرفاقه بكثير الحدود $a+bX$. ولما كان باقي قسمة كل كثير الحدود P على X^2+1 يكتب على الشكل $a+bX$ فإننا نستطيع تعريف التطبيق

$$\begin{aligned} f:\mathbb{C} &\to \mathbb{R}[X]/(X^2+1) \\ a+ib &\mapsto (P) \end{aligned}$$

حيث يمثل (P) صنف التكافؤ الذي باقي قسمة كل عنصر منه على X^2+1 يساوي $a+bX$. ومن ثم نطابق $a+ib\equiv(P)$. فعلى سبيل المثال فإن

$(X^2+1)\equiv 0$ (لأن باقي قسمة كثير الحدود X^2+1 على X^2+1 يساوي $0+0.X$، أي 0)،

$(1)\equiv 1$ (لأن باقي قسمة كثير الحدود الثابت 1 على X^2+1 يساوي $1+0.X$، أي 1)،

$i\equiv(X)$ (لأن باقي قسمة كثير الحدود X على X^2+1 يساوي $0+1.X$).

3.5 إنشاء باستخدام المصفوفات :

نعتبر مجموعة المصفوفات 2×2 من الشكل $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ حيث تمسح (a,b) الجداء $\mathbb{R}^2$. إذا رمزنا لهذه المجموعة بـــ M وزودناها بعمليتي جمع وضرب المصفوفات فإننا نلاحظ أن العمليتين داخليتان في M وأن $(M,+,\times)$ يصبح حقلا. على سبيل المثال فإن مقلوب $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ هو $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$. نطابق بعد ذلك بين $\mathbb{C}$ و M من خلال التشاكل :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \to M \\ a+ib &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

فنلاحظ مثلا أن المصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ تمثل i وأن المصفوفة $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ تمثل $a-ib$ (مرافق $a+ib$).

4.5 كتابة الأعداد المركبة :

هناك طريقتان لكتابة الأعداد المركبة هما الكتابة الجبرية، وهي التي سبق ذكرها المتمثلة في كتابة عدد مركب على الشكل $a+ib$، وهناك أيضا الكتابة المثلثية المتمثلة في إدخال زاوية (عمدة) $\vartheta \in [0,2\pi[$ وطويلة $r \in \mathbb{R}^+$ وكتابة $a+ib = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ في حالة $a+ib \in \mathbb{C}^*$. وهذا يعني أن

$$\begin{cases} a = r\cos\vartheta, \\ b = r\sin\vartheta. \end{cases}$$

ونلاحظ أن التعبير عن r بدلالة a و b هو $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

أما التعبير عن ϑ بدلالة a و b فيعرّف بالعلاقة (علما أن $\vartheta \in [0,2\pi[$)

$$\cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \sin\vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

كما نلاحظ أن العمدة تحقق العلاقة $\operatorname{tn}\vartheta = \frac{b}{a}$ عندما يكون $a \neq 0$. أما إذا كان $a=0$ فإن $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ أو $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ حسب إشارة b.

ويتم التعبير عن الأعداد المركبة بالشكل الأسي فنكتب

$$a+ib = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{i\vartheta}.$$

يعتبر هذا التمثيل مهمًّا في استعمالات كثيرة، مثل الهندسة (في التحويلات النقطية، مثلا) والفيزياء (سيما الإلكترونيك).

نلاحظ أيضا أن العلاقة $\cos\vartheta + i\sin\vartheta = e^{i\vartheta}$ تؤدي إلى دستوري أولر Euler

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}, \\ \sin\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}. \end{cases}$$

والواقع أن التعريف الدقيق للدوال المثلثية يتم بعد تعريف الدالة الأسية بواسطة السلاسل الصحيحة. ونستفيد في هذا الانتقال من الدالة الأسية إلى الدوال المثلثية من العلاقتين السابقتين. ونستنتج من ذلك دستور دي موافر de Moivre حيث يمكن تبرير الكتابة :

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \left(e^{i\vartheta}\right)^n = e^{in\vartheta} = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta$$

أي أن :

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta .$$

5.5 الرؤية الهندسية للأعداد المركبة :

نزود المستوي التآلفي بمعلم متعامد ومتجانس ونعتبر عنصرا $z = x + iy \in \mathbb{C}$. ثم نرفق $z = x + iy$ بالنقطة $M(x,y)$ في المستوي فننشئ بذلك تقابلا بين مجموعة الأعداد المركبة ومجموعة النقاط في المستوي. نلاحظ مثلا أن صورة المرافق $\overline{z} = x - iy$ لـــ z هي النقطة $M'(x,-y)$. وبالتالي فإن صورتي z ومرافقه متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل. ويمكن استنتاج كثير من الخواص التي تربط الأشعة بالأعداد المركبة، وهي خواص تثبت السهولة في الحصول على العديد من

العلاقات الهندسية عند استخدام الأعداد المركبة (مثل جمع الأشعة وضربها في الأعداد السلمية ...).

6. تطور العدد :

يبدو للناس اليوم أن العمليات الحسابية التي يجريها باستمرار التاجر والتلميذ والمعلم ورجل الأعمال، عمليات تفطّن إليها الإنسان منذ عهد آدم عليه السلام. إن المتتبع لتطور مفهومي العدد والعمليات الحسابية لا بد أن يدرك بأن الأمر لم يكن كذلك ... وأن وصولنا إلى ما نحن عليه الآن من تقدم في هذا المجال لم يكن هيّنا، بل كان عسيرا مريرا.

ثم إن تطوّر علم الحساب وتزايد الحاجة إليه وإلى سرعة إجراء عملياته جعل الإنسان يسعى إلى صنع آلة تساعده – أو تقوم مقامه – في أداء المهمات الحسابية المملة بتكراراتها والصعبة في مكوناتها. وهكذا اهتدى تدريجيا، بمرّ السنين والقرون، إلى ابتكار آلة حاسبة ما فتئت تتطوّر وتتطوّر في تصميمها وصناعتها ومهامها.

غير أن الحاسبة تطوّرت بسرعة مذهلة خلال القرن العشرين، سيما في نصفه الثاني، كما تشعبت البحوث حولها فتولّد عنها الحاسوب والمعلوماتية وشبكة الإنترنت وغيرها من الأدوات التكنولوجية الحديثة. دعنا نلقي نظرة موجزة على بعض محطات تطور مفهوم العدد.

1.6 العدد قبل مئات آلاف السنين :

في البداية ... قبل 300 ألف سنة ... لم يكن مفهوم الوحدات العددية متواجدا في الفكر البشري. ويمكن أن نتخيل بأن الحيوانات وقتئذ كانت ضخمة ترى الجنس البشري كفرد من أفرادها ... ولا يمثل سوى قطعة من لحم أو فريسة صالحة للأكل عند الجوع. وربما كان بعض البشر أو كلهم يرون أنفسهم كذلك. كما أن مفهوم الحدود الجغرافية والملكية لم يكن معروفا آنذاك، فأرض الله واسعة تسع لجميع خلقه ولا مجال للتنافس على امتلاك أي شيء. وإن كان الأمر كذلك فما الحاجة للعد والحساب وتحديد المساحات؟

غير أن هذا لا يعني بأن البشر في ذلك الوقت لا يفهمون تقدير الكميات بالحجم أو الوزن أو العدد. فإذا وضعت أمام أحدهم كومة كبيرة من التفاح وبجانبها مجموعة صغيرة أخرى فلا شك أنه سينبئك أن هذه الكومة تحتوي على كمية من التفاح أكبر من المجموعة التي بجانبها ... لكنه سوف لن يقول لك بأن الكومة تضم 200 تفاحة مثلا وأن المجموعة الصغيرة لا تتجاوز 20 تفاحة.

وبمرور الزمن تنقّل الإنسان من بقعة إلى أخرى، وهاجر شتاء وصيفا من مكان إلى مكان. وتزايد عدد البشر وتجمّعوا في أماكن معينة تمتاز بوفرة الماء أو سهولة الاحتماء أو خصوبة تربتها فصار الفرد أو

الجماعة تمتلك قطعة من الأرض تسكنها، وربما تفلح جزءا منها، ولها حدود تفصلها عن باقي البشر. والتجمعات السكانية تقضي بأن كل واحد يحتاج إلى خدمة الآخرين، ومن ثمّ نشأت الحرف وتعددت، فهذا حداد، وذاك إسكافي، وهذا نجار، وذاك مزارع، الخ. والحرفيون يحتاجون، بحكم طبيعة نشاطهم، إلى حساب الطول والمساحة والحجم والوزن. وكل هذه المسائل لا يمكن حلّها إلا بالعدّ والحساب والإلمام بقواعدهما.

ثم إن الإنسان كان في ذلك العهد لا يحتاج إلى الكثير من الأعداد والأرقام في حياته البسيطة. وعندما زادت النشاطات التجارية والتعاملات بين الناس فإن العدد وتطويره صار موضوعا في غاية الأهمية. ومما زاد تدريجيا في انشغال الأفراد والمجتمعات بموضوع العدد وترقيته والبحث في خصائصه اهتمامهم المتنامي بالشؤون العلمية مثل الجغرافية والفلك.

ولا شك أن قبل 200 ألف سنة كان الإنسان يستخدم في الحساب أصابعه، وكذا الحجارة والحصى ونحوها. وربما كان الإنسان يخزّن بكيفيات مختلفة بعض النتائج الحسابية لاستخدامها مستقبلا. فقد تم العثور في إفريقيا على عظم يرجع تاريخه إلى حوالي 85 قرنا يحمل إشارات تمثّل الأعداد الأولية. كما اكتشف العلماء في الهند ما يدل على وجود رسوم لبعض الأعداد قبل الميلاد بـــ 60 قرنا. كانت الأشكال

الأولى للأرقام رموزا تتكون من خطوط عمودية أو أفقية، كل خط منها يساوي 1. لكن هذه الأشكال صارت شيئا فشيئا لا تفي بحاجيات الناس لكتابة الأعداد الكبيرة، ولذلك تبنّوا رموزا ما فتئت تزداد فعالية.

2.6 الحساب عند قدماء المصريين :

كان المصريون القدماء يستخدمون منذ حوالي 4 آلاف سنة قبل الميلاد (وبالتحديد قبل 6400 سنة من الآن) رمزا خاصا للرقم 10. وهكذا فكتابة العدد 11 مثلا لا يتطلب سوى رقمين (بدل 11 رقما). وكان العدد 99 قبل ذلك الوقت يتطلب 99 رمزا فأصبح لا يتطلب أكثر من 18 رمزا أو رقما. ثمّ أدخل المصريون رموزا أخرى لتغطية كل الأرقام من 1 إلى 10، وأضافوا إليها بعض مضاعفات 10. وبطبيعة الحال، فلو كان النظام العشري هو القائم آنذاك لما احتاجوا إلى إضافة مضاعفات 10.

وقد كتبت الأرقام 1، 2، 3 على هيئة خطوط عمودية متجاورة، وكان الخط الأفقي مثلا يمثّل عندهم الرقم 4. ورمز المصريون لـــ 8 بخطين أفقيين أحدهما فوق الآخر، أما العشرة فكانت على شكل حدوة، والألف على شكل زهرة اللوتس، والمائة على شكل لفافة مطوية، والعشرة آلاف على شكل إصبع معقوف، والمائة ألف على شكل سمكة، والمليون على شكل رجُل رافع يديه، والعشرة ملايين على شكل رأس

إنسان. والملاحظ عند قدماء المصريين أن موقع الرقم في كتابة العدد لا يهمّ في هذه الحالة، وترتيب الأرقام أيضا لا يؤثر في قراءة العدد ... فلا معنى لديهم لمرتبة الآحاد ولا لمرتبة العشرات، الخ.

3.6 وعند البابليين ومن خلَفهم :

وظهرت أيضا أنظمة عدّ أخرى في العهود الغابرة مثل تلك التي ابتدعها البابليون الذين لجئوا إلى النظام الستيني المستعمل في تحديد الزمن (انظر كيف تشتغل الساعات) والقياسات الفلكية وبعض الحسابات الرياضية. وكان السومريون والبابليون يكتبون الأرقام مستخدمين رسوما مسمارية أفقية أو عمودية.

ويعتقد أن السومريين هم أول من سجّل الأعداد بشكل متميّز، حوالي 3200 سنة قبل الميلاد، وتركوا آثارا شاهدة على ذلك. وكان لهذا الإبداع أثر إيجابي على تجارتهم. كما استعملوا نظامين للترقيم، أحدهما تجميعي بسيط مثل الذي كان سائدا لدى الشعوب القديمة. ومن المعلوم أن البابليين قاموا – حوالي 2400 سنة قبل الميلاد – بتحديد قيمة تقريبية للعدد π... فقالوا إنه يساوي 3 وثُـــمُـــنَ الوحدة.

والعدد π هو نسبة محيط أية دائرة على قطرها. ولا بد أن نشير بهذا الخصوص إلى أن البحث في القيمة الدقيقة لهذا العدد لم تتوقف منذ

قديم الزمان إلى يومنا هذا حيث يستغل الرياضيين أحدث ما جادت به تكنولوجيا الحواسيب لتحديد أكبر عدد ممكن من الأرقام التي تلي الفاصلة في كتابة هذا العدد اللغز. وقد توصل المختصون في علم الحساب العددي الآن بفضل قوة الآلات المستخدمة إلى تحديد ملايير وملايير الأرقام التي تلي الفاصلة في العدد π دون التمكّن من تحديد كل الأرقام الموالية للفاصلة لحد الساعة. أما المصريون القدماء فتوصلوا، حوالي 1850 سنة قبل الميلاد، إلى تقريب آخر للعدد π ... فقالوا إنه يساوي نسبة العدد 256 على 81. كما قام الصينيون سنة 1350 قبل الميلاد بعمل مماثل.

4.6 تنوع أنظمة العدّ وكتابة الأرقام :

أشرنا آنفا إلى استخدام النظام الستيني وغيره. وعلينا أن نضيف بهذا الشأن أن الرومانيين استخدموا في بعض الحالات نظام عدّ يعتمد على الأساس 12. كما استخدم قبائل المايا Maya في أمريكا الجنوبية نظاما يعتمد على العدد 20 ... فكان يرمز إليه بفأس بينما رمزوا للعدد 60 بثلاثة فؤوس. والواقع أنه يمكن تصنيف أنظمة العد إلى 3 أصناف هي :

1) العدّ التجميعي الذي يستعمل فقط فكرة الجمع؛

2) هناك صنف آخر يمزج بين الجمع والضرب. فالعدد 60 يمكن التعبير عنه برمزين يدلان على عملية ضرب 6 في 10؛

3) صنف ثالث يراعي موقع الرقم أو الرمز في الكتابة. فعندما نكتب في نظامنا الحالي 11 فإن 1 في مرتبة الآحاد ليس له نفس المعنى الذي يحمله الرقم 1 الموجود في مرتبة العشرات. ومن ثمّ تبيّن بعد عديد القرون أنه لا بد من ابتداع ما يشبه الصفر لكي نوضّح بأن في مرتبة معيّنة ليس هناك رقم مثل كتابة 10 ... فإن 0 يعني أنه ليس هناك رقم في مرتبة الوحدات. وهذا النظام صار (بعد إدخال الصفر) في منأى عن الخطأ، وتبيّن أنه أكثر فعالية. وهنا يكمن إسهام من أكبر الإسهامات التي قدمتها الحضارة العربية الإسلامية للعلم، إذ حسّنوا ما كان موجودا في زمانهم ونقلوه إلى الغرب جاهزا للاستعمال.

الأرقام اليونانية : لجأ الإغريق إلى نوعين من العدّ : كان الأول مبنيا على الحروف الأولى التي تبدأ بها أسماء الأرقام مثل العدد 10 الذي يرمز له بالحرف δ و 10000 بالحرف μ.

أما النوع الثاني للترقيم فقد أدخل في القرن الثالث قبل الميلاد حيث استخدمت الأبجدية اليونانية كلها للدلالة على الأرقام، إضافة إلى رموز ثلاثة من الأبجدية الفينيقية. كانت الحروف التسعة الأولى في الأبجدية تسمح بكتابة الأرقام من 1 إلى 9. وخصصت الأحرف التسعة الموالية لمضاعفات 10، وخصصت أحرف التسعة الأخيرة لمضاعفات

100. ورمز اليونانيون للآلاف بِمَدَّة عمودية على يسار العدد المقصود. وهكذا نرى أن هذا النظام يسمح بتمثيل أعداد كبيرة بقدر معين باستخدام عدد معقول من الرموز (27 رمزا بالإضافة إلى الأعمدة).

الأرقام الرومانية : يسمح نظام الرموز المستخدمة عند الرومانيين بالتعبير عن كل الأعداد المحصورة بين 1 ومليون باستخدام 7 رموز وهي: I = 1 ، V = 5 ، X = 10 ، L = 50، C = 100 ، D = 500، M= 1000. نلاحظ أن الرموز تقرأ في النظام الروماني من اليسار إلى اليمين. وعندما نضع مَدّة فوق رقم فمعناه أنه مضروب في 1000. ولذلك فمن الناحية النظرية يمكن بهذه الطريقة كتابة أي عدد صحيح، لكن الأمر ليس كذلك من الناحية العملية. ومع هذا، فالعيب الكبير في الرموز الرومانية يكمن في أنها لا تسمح بإجراء الحسابات الكتابية السريعة. ولذا فهي لا تتماشى مع متطلبات الآلة الحاسبة.

5.6 الهنود والترقيم :

اجتهد قدماء الهنود في البحث عن تسهيل عملية الترقيم فتعاملوا مع الأعداد الكبيرة بوضع أسماء خاصة تدل على مضاعفات العدد 10 حتى وصلوا إلى مائة مليون. وفي اللغة السنسكريتية القديمة هناك تسميات لكل مضاعفات الرقم 10 حتى بلغوا العدد المساوي لـــ 1 متبوعا بثلاثة وعشرين صفرا. ونجد لدى الهنود إلماما بالنظام العشري في

الترقيم. وكانوا يستعملون تسعة رموز للإشارة إلى الأعداد من الواحد إلى التسعة. وقد حافظوا على نفس الرموز للتعبير عن الأعداد من 10 إلى 90 ووضعوا تحتها نقاطا. ثم أعادوها مرة ثانية وتحت كل منها نقطتان للدلالة على الأعداد من 100 إلى 900. وهكذا دواليك.

ورغم ذلك لم تكن الطريقة الهندية في كتابة الأعداد واضحة بالقدر الكافي في العديد من الحالات. فعلى سبيل المثال فإن كتابة العدد 307 يتطلب منهم كتابة الرقمين 3 و 7 وترك فراغ بينهما أو علامة تدل على خلو مرتبة العشرات. وأنت تتصور الغموض الذي يطرأ في هذه الحالة لدى محاولة التمييز بين فراغ واحد وفراغين أو أكثر من الناحية العملية في المؤلفات. ولذا لا تستغرب إن عجزت في هذه الحالة عن التمييز بين 307 و 3007 مثلا. ويسمي الهنود أحيانا هذا الفراغ "سونيا بندا". وحتى النقاط الموضوعة تحت الرموز الدالة على العشرات والمئات تتسبب عادة في سوء القراءة إذا ما نسيت أو لم تظهر جيدا في الكتابات، أو كانت قريبة من بعضها البعض تحت الرموز المتوالية. ولذلك قام الهنود في مرحلة ثانية بملء الفراغات السالفة الذكر بدوائر صغيرة أو نقاط تشبه الصفر.

6.6 الأرقام والحساب عند العرب :

يستعمل جميع الناس اليوم في كامل بقاع المعمورة ما يسمى بالأرقام العربية. والواقع أن هذا النظام قد شرع في تصميمه الهنود قبل الميلاد بثلاثة قرون، ثم أخذ العرب والمسلمون على عاتقهم تطوير هذا النظام ورموزه. ويؤكد المؤرخون بناء على المخطوطات المتوفرة لديهم أن الأوربيين شرعوا في استعمال الأرقام العربية ابتداء من القرن العاشر الميلادي.

ويلخص المؤرخ المرحوم قدري حافظ طوقان وضع الأرقام وانتقالها من الهند إلى الغرب ودور العرب في هذا الشأن بالقول : "لقد اطلع العرب على حساب الهنود، فأخذوا عنه نظام الترقيم . . . وكان لدى الهنود أشكال عديدة للأرقام، هذَّب العرب بعضها وكوَّنوا من ذلك سلسلتين، عرفت إحداهما بالأرقام الهندية وهي التي تستعملها هذه البلاد وأكثر الأقطار الإسلامية والعربية. وعرفت الثانية بالأرقام الغبارية، وقد انتشر استعمالها في بلاد الغرب والأندلس". ومن الأهمية بمكان أن نشير إلى أن ظهور الإسلام كان حافزا كبيرا في البحث والتنقيب في المجال العلمي في شتى المجالات، ومنها الرياضيات والحساب. وهكذا اهتم المسلمون بالرقم والعدد والحساب لقضاء حاجاتهم والسير قدما نحو تأسيس حضارة معالمها لا زالت حاضرة اليوم لتشهد على عمقها وأصالتها.

كان العرب في بداية الأمر يرمزون للأرقام بحروف أبجدية. وعندما لاحظوا لدى غيرهم نظام ترميز آخر يميّز بين الحروف والأرقام بحثوا في هذا الاتجاه وتوصلوا إلى صياغة أرقام واستخدموها في حسابهم. وكان عامة الناس في ذلك الوقت يستخدمون ما يعرف بحساب اليد (أو الحساب الهوائي) الذي يتطلب جهدا ذهنيا كبيرا. وقد قسم العرب والمسلمون الحساب العملي إلى حسابين هما الحساب الغباري والحساب الهوائي:

1. الحساب الغباري (أو الحساب الهندي) هو الحساب الذي يحتاج الناس خلال استعماله إلى أدوات بسيطة أو معقدة كالقلم أو اللوح أو الغبار (التراب).

2. الحساب الهوائي هو الحساب الذي لا يحتاج في استعماله إلى أية أدوات سوى اليد.

ومن المعلوم أن علماءنا اهتموا بالحساب الهوائي وقننوه في كتبهم الحسابية ووضعوا له قواعد لتسهيل استغلاله في حل مسائل الحساب العملي الذي تحتاجه الحياة العامة في التعاملات التجارية وغيرها. ومن الكتب العربية التي اهتمت بالحساب الهوائي كتابان للعالم أصبغ المهري عنوان أولهما " الكامل في الحساب الهوائي" وثانيهما "الكافي في الحساب الهوائي".

وأبسط الطرق الحساب الهوائي القاعدة التي نوضحها من خلال إجراء عملية الجمع التالية : 356 +483. للقيام بهذه العملية نتبع

الخطوات الخمس التالية التي ينبغي أن تتم دون أية كتابة حيث لا نعتمد أثناء الجمع سوى على الذاكرة وحركات اليدين: أولا: 700=400+300؛ ثانيا : 130=80+50 ؛ ثالثا : نجمع حاصلي الجمع السابقين فنجد : 830=130+700؛ رابعا : 9=3+6؛ خامسا: نجمع ما تحصلنا عليه في الخطوتين الثالثة والرابعة فنجد المطلوب وهو : 839=9+830.

وقد لاحظ العرب والمسلمون أن الحساب الهندي أكثر فعالية في إجراء العمليات الحسابية التي تتناول أعدادا كبيرة. وكان الهنود يجرون حساباتهم على اللوح والتراب ففضّل العرب القيام بذلك مستخدمين الورق والحبر لأن التراب تذريه الرياح وغيرها فيزول ما سجّل عليه من حساب. ومن المعلوم أن المسلمين هم الذين عرّفوا بالحساب الهندي إذ لم يكن يتداوله آنذاك إلا القليل من الناس سيما التجار، بل لم يكن منتشرا حتى في الهند ذاتها. ولذلك يمكن التأكيد بأن الفضل يرجع للعرب والمسلمين في تهذيب وتطوير الحساب الهندي.

7.6 اهتمام علمائنا بالعدد والحساب :

تشمل العمليات الحسابية التي تناولها علماء المسلمين عدة عمليات منها : جمع الأعداد وتضعيفها والطرح (المسمى التفريق) والضرب والقسمة واستخراج الجذور. كما اهتم هؤلاء العلماء بمفهوم النسبة لتحديد مقدار المنسوب مقارنة بالمنسوب إليه، مثل قول أن 3 تساوي ثلث 9. والواقع أن النسبة تنقسم، حسب العرب والمسلمين، إلى ثلاثة أنواع هي :

1) النسبة العددية التي نجدها في الحساب، 2) النسبة الهندسية المتداولة في الهندسة، 3) النسبة التأليفية التي استخدمها الرياضيون في الموسيقى قصد تقنينها واستخراج الأنغام والألحان.

وقد بلغ علم الحساب عند العرب والمسلمين مستوى من الرقي جعلهم يتجاوزون الجانب العملي المتصل بصفة مباشرة بحياة الناس. وهكذا راحوا يبدعون القوانين والنظريات المختلفة التي تفيد في حل مسائل متنوعة أسهمت في بناء الحضارة العربية الإسلامية. وتميّزت مؤلفات العرب والمسلمين في موضوع الحساب بوفرة الأمثلة والتمارين العملية ذات الصلة بما يحتاجه الناس في شتى الميادين من معاملات تجارية إلى مسائل الميراث، ومن توزيع الرواتب على الجند وغيرهم إلى مسائل تقسيم الأراضي. وقد أثّرت مؤلفات علماء المسلمين المتعلقة بالعمليات الحسابية على الحركة العلمية في الغرب. ولعل أشهر هذه المؤلفات كتاب

في علم الحساب للخوارزمي سماه "كتاب الجبر والمقابلة"، وهو العمل الذي انبعث منه علم الجبر الحديث.

ولم يكن الخوارزمي المبدع الوحيد في حقل العدد والحساب عندما كانت حضارتنا بالأمس في أوج عزّها : ففي الشرق نجد غياث الدين جمشيد الكاشي الذي يعتبر أول من حوّل الكسور العاديّة إلى كسور عشريّة في علم الحساب. وفي الغرب الإسلامي هناك السموءل المغربي الذي استخدم لأول مرة الأسس السالبة في الحساب. وفي الأندلس نجد أبا الحسن علي بن محمد القلصادي الأندلسي الذي استخدم الحرف ج للدلالة على رمز الجذر التربيعي فانتشر هذا الرمز في مختلف لغات العالم. أما حساب المثلثات فعرف قفزة لم يعرفها من ذي قبل على أيدي علماء مسلمين كثيرين، منهم أبو عبد الله البتاني والزرقلي ونصير الدين الطوسي. وما الأسماء اللامعة التي ذكرناها آنفا سوى عينة صغيرة جدا من سجلّ ضخم ضمّ عمالقة الحساب خصوصا والرياضيات عموما.

8.6 قبل الميلاد ... كان المِـــعْـــداد :

يجمع المؤرخون على أن أول آلة حاسبة كانت تلك التي ظهرت في الصين خلال القرن التاسع قبل الميلاد، وهي المسماة "المِـــعداد الصيني" (المسمى السوروبان Soroban في الصين). وهذا على الرغم من أنه لم يكن في الواقع آلة بالمعنى الحديث إذ ليس فيه ما يتطلب شيئا

من علم الميكانيك، غير أنه كان أداة مثيرة في بساطتها وتساعد كثيرا على إجراء العمليات الحسابية البسيطة، من جمع وطرح، التي يحتاج إليها التجار. كما يساعد على القيام بعمليتي الضرب والقسمة. وأجمل ما في هذه الآلة أنها لا تتطلب ورقا وقلما أثناء استخدامها.

وأصبحت هذه الآلة تتكوّن بعد تطويرها من إطار مربع أو مستطيل الشكل يصنع عموما من الخشب، وتتخلّله قضبان أفقية متوازية تحمل سبع كرات خشبية أو زجاجية تنزلق يمينا ويسارا لتقترب أو تبتعد من قضيب آخر شاقولي يقسم الإطار الخشبي إلى قسمين. ويمكن أن يكون عدد القضبان الأفقية 8 أو 12 أو 30 قضيبا أو أكثر ... وهذا حسب حجم وتعقيدات الحسابات التي يرغب صاحب المعداد في إجرائها.

أما طريقة الحساب فهي تتم بتحريك الكرات، وتقرأ النتائج حسب وضعية تلك الكرات داخل الإطار مقارنة بوضعية القضبان، بما فيها القضيب الشاقولي. ولا زال المعداد إلى اليوم محل اهتمام، ولا زالت تجرى به بعض المسابقات الحسابية في الشرق والغرب ويتخذ كأداة تعليمية في العديد من المدارس.

والملاحظ أن استخدامه ظل ساريا إلى اليوم لدى الباعة المتجولين الأميين وغير الأميين مثل المحاسبين وعمال الفنادق والبنوك وحتى العلماء في شرق آسيا، كالصين والفيتنام وتايلندا وسنغافوره

وتايوان. ويرجّح المؤرخون بهذا الخصوص أن التجار هم الذين عرّفوا بالمعداد في المناطق الأسيوية فدخل كوريا حوالي 1400م واليابان حوالي 1600م. كما أنه كان يستخدم في روسيا وأوروبا حتى القرن الثامن عشر، علما أنه استخدم في اليونان ستة قرون قبل الميلاد.

9.6 الحاجة أم الاختراع :

إن الحاجة إلى أدوات تيسّر الحسابات الطويلة والمملة بتكراراتها كانت من البواعث التي جعلت الناس جميعا يبحثون عن مخرج يسهل القيام بالعمليات الأربع بصفة ميكانيكية. وقد تم العثور على آلة بدائية بإحدى الجزر اليونانية عام 1947 تحسب وتحدّد مواقع الكواكب السبعة المعروفة في العهود الغابرة ... عهود القرن الثاني قبل الميلاد.

كان العلماء يقضون أوقاتا طويلة في الحسابات الشاقة التي قد يتسرب إليها الخطأ في أية لحظة. وكان الوقت الضائع في إجراء الحسابات البسيطة يعيق القيام بأعمال مهمة أخرى فيعرقل الباحثين في تقدم أشغالهم. وقد عبّر عن هذا الانشغال العديد من العلماء عبر القرون الخالية، منهم على سبيل المثال العالمان البريطانيان الشهيران إسحاق نيوتن Newton (1642– 1727) واللورد كلفين Kelvin (1824–1907). كما أن النمو الاقتصادي المتسارع خلال القرن التاسع عشر

جعل الناس يدركون ضرورة التعجيل بصنع آلات حاسبة تختصر لهم الزمن الواجب قضاؤه في إجراء الحسابات العددية.

10.6 بداية مشوار الآلة :

يعتبر عام 1617 لدى مؤرخي العلوم تاريخا بارزا في الابتكارات الخاصة بالحاسبات حيث قام الأنكليزي جون نابييه Napier (1550–1617) في تلك السنة بإنجاز جداول متحركة تتكوّن من قضبان يؤدي تحريكها إلى إجراء عمليات حسابية بسرعة كبيرة مقارنة مع ما يقضيه البشر دون استعمال آلة. وقد حظيت هذه الجداول، بفضل طريقة حسابها السريع، باهتمام كبير من قبل الفلكيين والرياضيين. ثم قام الأنكليزي إدمون غنتر Gunter (1581– 1626) عام 1620 بتحسين ابتكار نابييه فصارت تلك الجداول أشبه بالمساطر الحسابية التي تم تداولها حتى نهاية الستينيات من القرن العشرين.

وقد تحقّق خلال الأربعة قرون الماضية تقدم ملحوظ في مكْـنَـنَة الحساب على يد الألماني ولهلم شيكارد Schickard (1592– 1635) الذي صمّم عام 1624 "ساعة حاسبة"، وهي آلة تقوم بالعمليات الأربع. ولسوء الحظ فإن هذه الآلة لم تصنع قط. ثم تلاه الرياضي والفيلسوف الفرنسي بليز باسكال Pascal (1623–1662) وجاء بآلته الحاسبة الشهيرة، التي لا تحسن سوى إجراء عمليتي

الجمع والضرب، ابتكرها صاحبها عام 1642 وهو غير ملم بأعمال من سبقوه في هذا المجال.

وما كان يشغل بال باسكال عند تصميمه لهذه الآلة هو أنه كان يرغب في تسهيل إجراء الحسابات الإدارية الطويلة التي كان يكلّفه بها أبوه، المحاسب في إحدى المقاطعات الفرنسية آنذاك. وقد صنع حوالي 50 نسخة مــن هذه الآلــة المسماة باسكالين Pascaline. ومن المحاولات الأخرى صناعة مسطرة حاسبة من قبل الإنكليزي وليم أوغتريد Oughtred (1574–1660) عام 1657. نشير في هذا السياق إلى أن هذا العالم هو الذي أدخل في الرياضيات الرمز × كعلامة لعملية الضرب.

وبعد ذلك قــام الألماني غوتفريد ويلهلم ليبنيتز Leibniz (1646–1716) عام 1673 بتحسين آلة باسكال فأدخل عليها إمكانية إجراء عمليتي الضرب والقسمة. ومن ثم اعتبرت آلة ليبنيتز من قبل بعض المؤرخين أول آلة حاسبة قادرة على إجراء العمليات الأربع بطريقة ميكانيكية، إضافة إلى استخراج الجذور التربيعية. ويروى أن والدة ليبنيتز قد اهمت بالسحر وبعلاقتها بالجنّ والشياطين بسبب ابتكار ابنها لهذه الآلة العجيبة ... وإلا كيف يمكن – في نظر المتهمين – أن تنجب هذه المرأة ولدا يهتم بمثل هذه المنجزات الشيطانية؟ !

11.6 ويتواصل مشوار الابتكارات :

وقد تواصلت الأبحاث خلال عشرات السنين من أجل تحسين أداء آلتي باسكال وليبنيتز حتى تصبحا قابلتين للتسويق، لكن بدون جدوى. فظل استخدام هذه الآلات حكرا على بعض الرياضيين والعلماء المبتكرين دون سواهم. لكن حلول القرن التاسع عشر بتحولاته الصناعية ونشاطاته المتعددة في المجال التجاري سرّع من وتيرة البحث في موضوع الآلة الحاسبة لأنها صارت من ضروريات الحياة الاقتصادية. وهكذا ركّز المخترعون جهودهم على تبسيط استخدام الآلة الحاسبة لتكون في متناول الجميع وجعل نتائجها أكيدة خالية، بوجه عام، من الأخطاء. ولم تظهر ثمرة هذه الأبحاث إلا ابتداء من سنة 1820.

والواقع أن آلة ليبنيز قد صممت عام 1673 لكنها لم تصنع إلا عام 1694. ورغم قدرات هذه الآلة، مقارنة مع آلة باسكال، فإنها لم تحظ بأي اهتمام تجاري ولم تجد من يتولّى أمر تسويقها، وكانت ثاني نسخة منها قد صنعت بعد عشر سنوات (عام 1704). ثم إن هذه الآلة لم تشتغل بشكل لائق بسبب تعقيد آلياتها التي أعاقت حسن صناعتها. ذلك أن مستوى الصناعة الميكانيكية لم يرق آنذاك إلى مستوى مقبول من الدقة الحسابية.

وعلى كل حال فالمؤرخون يرون أن الألماني ليبنيتز هو الذي فتح الباب واسعا، أكثر مما فعله باسكال، أمام تطوير الحساب الميكانيكي (أي

المستخدم للآلات). ولذا تعتبر آلة ليبنيتز مصدر سلسلة من الابتكارات في هذا الاتجاه تواصلت حتى مطلع القرن العشرين.

ففي مطلع القرن التاسع عشر الميلادي ظهرت آلة حاسبة ميكانيكية – حجمها كحجم الطاولة – سماها صاحبها شارل كسافيي توماس دي كولمار Thomas de Colmar (1785–1870) "أريتمومتر" arithmometer ". وقد ابتكرت عام 1821، وصنع منها حوالي 1500 نسخة. ومن المعلوم أن هذه الآلة تحصلت على ميدالية ذهبية في معرض باريس عام 1855. وجاءت بعدها آلة أستاذ الرياضيات الإنكليزي شارل باباج Babbage (1792–1871) الذي حاول أن يجعل منها آلة تحلّ المعادلات وتجري العمليات المعقدة في التحليل الرياضي.

وقد واجهت باباج في تحقيق حلمه عقبات كثيرة، منها أن الوسائل التقنية التي كانت متوفرة في ذلك الوقت لم تسمح بصناعة آلة فائقة التطور رغم سلامة تصميمها من الناحية النظرية ... وتوفي باباج دون أن يرى آلته مجسدة يستعملها الناس كما سطّر لها على الرغم من أن الشركة السويدية شوتز Scheutz قد حاولت صناعتها عام 1860. ويرى المؤرخون أن آلة باباج كانت في الواقع حاسبة تضم كل مركبات الحواسيب التي ظهرت إلى الوجود في منتصف القرن العشرين ... بل يذكر أن ما صنعته شركة آي بي آم IBM خلال السبعينيات من

القرن العشرين هو إنجاز لمشروع آلة باباج التي صممت في مطلع القرن التاسع عشر !!

وعلى كل الحال فإنه يمكننا القول بأن الأفكار الأساسية لصناعة الآلات الحاسبة كانت موجودة في منتصف القرن التاسع عشر، سيما بعد ظهور أعمال الإنكليزي جورج بول Boole (1815- 1864) الذي نشر كتابا عام 1847 يعتبر أساس الحسابات التي تقوم بها أية آلة. ويعرض هذا المؤلف القوانين الأساسية للعمليات الذهنية، وترجمها إلى لغة حسابية (المعروفة بـــ"النظام الثنائي" 0 و 1) تمكّن من أجراء جميع العمليات الحسابية والجبرية بالرقمين 0 و 1 دون سواهما. إنها لغة تستطيع الآلة إدراكها بسهولة واستغلالها ... فكان عمل هذا العالم المنطقي الركيزة النظرية لتصميم كل الآلات الحسابية التي أتت بعده، بما فيها جهاز الحاسوب المنتشر اليوم عبر أرجاء المعمورة بأعداد ضخمة. وقد كان لابتكار بول أثر كبير خلال فترة طويلة لدى الرياضيين والفلاسفة وغيرهم من العلماء والمختصين.

والطريف أن العالم النظري جورج بول حاول صناعة آلة حاسبة وفق تصوره الذي أعجب به الناس، لكنه أخفق في مشروعه. وفي عام 1879 اجتهد وليم تومسون Thomson، المعروف باللورد كلفين Kelvin (1824- 1907) السابق الذكر، محاولا الاستفادة من عمل جورج بول ومتجنبا العوائق التي واجهت سابقيه فتمكّن من صنع آلة تحمل اسمه.

لكن هذه الآلة لم تكن في الواقع آلة حسابية محضة، بل كانت آلة تحلّ مسائل رياضية مختلفة مثل توقّع حركة المدّ والجزر في البحار خلال سنة كاملة. وبطبيعة الحال، فلم تكن هذه الآلة ذات دقة عالية في حساباتها في أول عهدها، ولم تتوفر فيها هذه الصفة إلا عام 1930 عندما تمت صناعتها بمعهد مساشوستس التكنولوجي IMT الأمريكي.

تلك هي أهم المحطات التي مرت بها صناعة الآلة الحاسبة حتى القرن التاسع عشر. وكانت تلك بداية دامت قرونا قبل أن يعرف تصميم هذه الآلة قفزة نوعية منقطعة النظير خلال القرن العشرين.

بعض مراجع

1. سعد الله أ. خ. : عالم الرياضيات، دار هومة، الجزائر، 2005.

2. سعد الله أ. خ. : الآلة الحاسبة، دار الخلدونية، الجزائر، 2006.

3. سعد الله أ. خ. : دروس موجهة لأساتذة التعليم الثانوي، المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم، الحراش، الجزائر، 2004.

1. Bourbaki N.: Eléments de Mathématiques, Théorie de Ensembles, Hermann, Paris, 1964.

2. Bourbaki N.: Eléments de Mathématiques, Algèbre, Chapitres de 1 à 3, Hermann, Paris, 1964.

3. Bouvier A.: Groupes: Observation, Théorie,Pratique, Hermann 1997.

4. Calais J.: Eléments de Théorie des Groupes, Puf., Paris, 1998.

5. Clark A.: Elements of Abstract Algebra, Dover, N. York, 1984.

6. Godement R.: Cours d'Algèbre. Hermann, 1966,
(مترجم إلى العربية، ديوان المطبوعات الجامعية)

7. Edwards H.M.: Fermat's Last Theorem, Springer Verlag, Berlin 1977.

8. Querre J. : Cours d'Algèbre, Masson, 1976.

9. Queysanne M. : Premier Cycle et Préparation aux Grandes Ecoles, Armand Colin, 1969.

10. Van der Waerden B.L. : Modern Algebra, Vol. 1,2, Berlin 1930, 1931.

11. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Ring_theory.html