


College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

Exercises 2

Q1- Decide whether the following propositions are tautology or a contradiction or a contingency:

$$1) (p \wedge q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$$

Solution:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \rightarrow q$	$(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

(By rules “ without using the truth tables”)


$$(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \quad (\text{Conditional Rule})$$

$$\equiv \neg p \vee \neg q \vee p \vee q \quad (\text{DeMorgan's Rule})$$

$$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \quad (\text{Commutative and}$$

Associative Rules)

$$\equiv T \vee T \equiv T \quad (\text{Negation Rule})$$

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

$$2) \quad [\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

Solution:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$	$[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

(By rules " without using the truth tables)


$$\begin{aligned}
 [\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q &\equiv \neg[\neg p \wedge (p \vee q)] \vee q \\
 &\equiv p \vee \neg(p \vee q) \vee q \\
 &\equiv (p \vee q) \vee \neg(p \vee q) \\
 &\equiv T
 \end{aligned}$$

(Conditional Rule)

(DeMorgan's Rule)

(Commutative and Associative Rules)

(Negation Rule)

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة


	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

3) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

Solution:

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

(By rules * without using the truth tables)

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة


	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

4) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

Solution:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

(By rules " without using the truth tables)

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة


	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

5) $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Solution:

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

(By rules " without using the truth tables)


College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

6) $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

(By rules " without using the truth tables)


College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

$$7) p \wedge \neg [q \rightarrow (p \vee r)]$$

p	q	r	$p \vee r$	$q \rightarrow (p \vee r)$	$\neg [q \rightarrow (p \vee r)]$	$p \wedge \neg [q \rightarrow (p \vee r)]$
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

(By rules * without using the truth tables)


College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

8) $\neg u \rightarrow [(u \wedge v) \rightarrow w]$

u	v	w	$\neg u$	$u \wedge v$	$(u \wedge v) \rightarrow w$	$\neg u \rightarrow [(u \wedge v) \rightarrow w]$
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

(By rules * without using the truth tables)


College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

9) Decide whether the following proposition is a Tautology or a Contradiction or a Contingency?

$$[(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$$

Solution:


College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني


10) Decide whether the following proposition is a Tautology or a Contradiction or a Contingency?

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Solution:

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة


	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

11) Show that the following proposition is a tautology (Don't use the truth tables)

$$(p \wedge q) \rightarrow (r \rightarrow q)$$

Solution.

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow (r \rightarrow q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (r \rightarrow q) \\
&\equiv \neg(p \wedge q) \vee (\neg r \vee q) \\
&\equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee q \\
&\equiv (q \vee \neg q) \vee (\neg p \vee \neg r) \\
&\equiv T \vee (\neg p \vee \neg r) \equiv T
\end{aligned}$$

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة


	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

12) Prove the following proposition is a tautology . (Don't use the truth table) :

$$(p \wedge q) \rightarrow [(q \vee r) \rightarrow p]$$

Proof:

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow [(q \vee r) \rightarrow p] &\equiv \neg(p \wedge q) \vee [\neg(q \vee r) \vee p] \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee [(\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)] \\
&\equiv [(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee p)] \wedge [(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg r \vee p)] \\
&\equiv [\neg p \vee \neg q \vee \neg q \vee p] \wedge [\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee p] \\
&\equiv [(\neg p \vee p) \vee \neg q] \wedge [(\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee \neg r)] \\
&\equiv [T \vee \neg q] \wedge [T \vee (\neg q \vee \neg r)] \\
&\equiv T \wedge T \equiv T
\end{aligned}$$

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة


	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

Q2 , 1) Show that $\neg(p \rightarrow q)$ and $p \wedge \neg q$ are logically equivalent ?

Solution:

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

$$\begin{aligned}
 \neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && \text{by condition law} \\
 &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \text{by the second De Morgan law} \\
 &\equiv p \wedge \neg q && \text{by the double negation law}
 \end{aligned}$$


College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

2) Show that $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ and $\neg p \wedge \neg q$ are logically equivalent by developing a series of logical equivalences.

Solution:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$	$p \vee (\neg p \wedge q)$	$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T						
T	F						
F	T						
F	F						

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني


17) Show that $p \leftrightarrow q$ and $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ are logically equivalent

Solution: (By the truth table)

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

18) Show that $p \leftrightarrow q$ and $\neg p \leftrightarrow \neg q$ are logically equivalent

Solution:

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني


19) Show that

$$\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \vee r)$$

Solution:

20) Show that $(p \wedge \neg r) \rightarrow q \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow r$

Solution:

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

25) Show that

Solution: $[p \rightarrow (q \rightarrow p)] \wedge (p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow \neg r) \equiv \neg p$

$$[p \rightarrow (q \rightarrow p)] \wedge (p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow \neg r) \equiv$$

$$\equiv [p \rightarrow (q \rightarrow p)] \wedge [p \rightarrow (r \wedge \neg r)]$$


$$\equiv [p \rightarrow (q \rightarrow p)] \wedge [p \rightarrow (F)]$$

$$\equiv [p \rightarrow (q \rightarrow p)] \wedge [\neg p \vee (F)]$$

$$\equiv [p \rightarrow (q \rightarrow p)] \wedge [\neg p]$$

$$\equiv [\neg p \vee (q \rightarrow p)] \wedge \neg p$$


$$\equiv \neg p \wedge [\neg p \vee (q \rightarrow p)] \equiv \neg p$$

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

26) Show that $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ and $\neg(p \wedge q)$ are logically equivalent .

Solution:

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة


	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

27) Decide whether $(p \wedge q) \rightarrow r$ is logically equivalent to $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ or not?

Solution:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

(Resolve it by rules)?

College of Applied Studies and Community Service Department of Computer Science and Engineering		 جامعة الملك سعود King Saud University
Third Semester 1444		كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع قسم علوم الحاسب والهندسة

	رقم الشعبة	Math153	رقم المقرر
	الرقم الجامعي		الاسم
	رقم الجوال		البريد الإلكتروني

28) Decide whether $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg r)$ is logically equivalent to $p \rightarrow (r \rightarrow q)$ or not?

Solution:

33) Show that the contrapositive of $(p \vee q) \rightarrow r$ is logically equivalent to $\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Solution: