٢

مع الحلول الكاملة

College of Sciences

Mathematical Department King Saud University

جامعة الملك سعود King Saud University

Final exam M.٢٢٥

Third semester 2023

Course Instructor: **Prof.M. DAMLAKHI.**

Course Title: Math ٢٢٥ (Differential Equations)

Date: Sunday 29/11/1444 – 18/6/2023.

Time: (8-11) am, 3 Hours.

السؤال الأول(٤+٤):

4 أ) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $y\ln x\, dx = \frac{(y+1)^2}{x^2} = dy.$ ، $x > 0$ و $y \neq 0$.

4 ب) برهن أن $\mu(x,y) = xy$ هو عامل تكميل للمعادلة التفاضلية التالية

$(-xy \sin x + 2y \cos x)dx + 2x \cos x\, dy = 0.$ ، حيث $xy \neq 0$.

السؤال الثاني(٤+٤):

4 أ) أوجد المعادلة التفاضلية ذات معاملات ثابتة إذا كانت معادلتها المميز

$m^2\,(m+2)(m^2+4) = 0$ ، ثم أوجد حلها العام.

4 ب) أوجد حل المسألة التفاضلية التالية:

$$x^3y''' - 2x^2y'' + 4xy' - 4y = 0 \;\;,\;\; x > 0.$$

السؤال الثالث(٤+٦):

أ) أوجد المسارات المتعامدة لمجموعة المنحنيات التالية:

$y = x + Ce^{-x}$ ، حيث $C \neq 0$ ثابت اختياري.

ب) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x} \;\;,\;\; x > 0.$$

السؤال الرابع(٦):

باستخدام طريقة المتسلسلات أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

. $x_0 = 0$ حول النقطة العادية $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$

السؤال الخامس(٢+٣+٣):

أ) أوجد . $\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\right]$

ب) إذا كانت $F(s) = 3\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + 12\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$ أوجد $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

ج) استخدم الفقرة ب) وتحويلات لابلاس لإيجاد حل المسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 6\sin(2t) \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

الحلول النموذجية للامتحان النهائي مقرر (٢٢٥) رسض
الفصل الثالث - عام ١٤٤٤هـ (٢٠٢٣)

السؤال الأول: أ) 4

$$y \ln x\, dx = \frac{(y+1)^2}{x^2}\, dy , \quad x>0 , y\neq 0$$

1 $$x^2 \ln x\, dx = \frac{(y+1)^2}{y}\, dy = \frac{y^2+2y+1}{y}\, dy$$

$\frac{x^3}{3}$

1 $$\int x^2 \ln x\, dx = \int \left(y+2+\frac{1}{y}\right) dy$$

$$\frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}y^2+2y+\ln|y| + c$$

2 $$\boxed{\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 = \frac{1}{2}y^2+2y+\ln|y|+c}$$

ب) 4

$$(-xy\sin x + 2y\cos x)\, dx + 2x\cos x\, dy = 0$$

يكون $\mu(x,y) = xy$ ، (حيث $xy\neq 0$) عامل تكامل للمعادلة إذا ضُرب في
المعادلة التفاضلية

$$xy\left[-xy\sin x + 2y\cos x\right] dx + xy(2x\cos x)\, dy = 0$$

2 $$(\underbrace{-x^2y^2\sin x + 2y^2x\cos x}_{M})\, dx + \underbrace{2x^2y\cos x}_{N}\, dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x^2y\sin x + 4xy\cos x , \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy\cos x - 2x^2y\sin x$$

إذاً صارت المعادلة تامة ∴

إذاً توجد دالة F في x ، y حقيقية:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -x^2y^2\sin x + 2y^2x\cos x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y\cos x$$

1 $$F(x,y) = \int 2x^2y\cos x\, dy = x^2y^2\cos x + \phi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2\cos x - \cancel{x^2y^2\sin x} + \phi'(x) = -\cancel{x^2y^2\sin x} + \cancel{2y^2x\cos x} \Rightarrow \phi(x) = c \quad \frac{1}{2}$$

إذاً يكون حل المعادلة التفاضلية هو

$$\boxed{F(x,y) = x^2y^2\cos x + c = 0} \quad \frac{1}{2}$$

السؤال الثاني:

4 أ) لدينا المعادلة المميزة:

$$m^2(m+2)(m^2+4)=0$$

$$(m^3+2m^2)(m^2+4)=m^5+2m^4+4m^3+8m^2=0$$

ومنه فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

2 $\boxed{y^{(5)}+2y^{(4)}+4y'''+8y''=0}$, $y=c_1+c_2x+c_3e^{-2}+c_4\cos(2x)+c_5\sin(2x)$

2 الحل العام

$$x^3y'''-2x^2y''+4xy'-4y=0\ ,\quad y=x^m,\ x>0\qquad \text{ب)}$$

$$m(m-1)(m-2)-2m(m-1)+\underbrace{4m-4}_{4(m-1)}=0 \qquad 4$$

$$(m-1)\left[m(m-2)-2m+4\right]=0$$

$$(m-1)\left[m^2-4m+4\right]=(m-1)(m-2)^2=0 \Rightarrow m=1,\ m=2,2 \qquad 2$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\boxed{y=c_1x+c_2x^2+c_3x^2\ln x} \qquad 2$$

السؤال الثالث: أ) $y=x+Ce^{-x}$, حيث C ثابت اختياري $\neq 0$

4+1 5

$$y'-1=-Ce^{-x} \Leftarrow y'=1-e^{-x}c$$

$$+\ y-x=Ce^{-x}$$

$$\Rightarrow y'-1+y-x=0$$

$$y'_1=1+x-y=f(x,y)$$

لنوجد من المعادلة التفاضلية التالية:

1 $y'=\dfrac{-1}{f(x,y)}$

$$y'=\frac{-1}{1+x-y}\quad \text{أو}\quad \underset{M}{d}x+(1+x-y)dy=0 \qquad 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-1$$

$$g(y)=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{N}=\frac{+1}{1}=1 \Rightarrow \mu(y)=e^{\int 1dy}=e^y \qquad 1$$

عند التعويض بالمعادلة التفاضلية، نجد أنها معادلة تامة

$$e^y dx+(e^y+xe^y-ye^y)dy=0$$

لأن

2 $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=e^y$$

إذاً توجد دالة F في x, y بحيث يكون

$$\frac{\partial F}{\partial x}=e^y,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=e^y+xe^y-ye^y$$

$$F(x,y)=\int e^y dx=e^y x+\phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=e^y x+\phi'(y)=e^y+xe^y-ye^y \Rightarrow \phi'(y)=e^y-ye^y$$

$$\phi(y)=e^y-(ye^y-e^y)=2e^y-ye^y+c$$

ب) 6

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x} \; ; \quad x > 0$$

1) $y'' + 2y' + y = 0$, $y = e^{mx}$, $m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 = 0$

$m = -1, -1$

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} , \quad y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = x e^{-x}$$ 2

2) $y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2$

حيث يكون:

$$\begin{cases} u_1' e^{-x} + u_2' e^{-x} x = 0 \\ u_1'(-e^{-x}) + u_2'(e^{-x} - x e^{-x}) = \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases}$$

وبالتالي

$$\cancel{u_1'} + x u_2' = 0$$

$$+ \quad \cancel{-u_1'} + u_2'(1-x) = \frac{1}{x}$$

$$u_2' = \frac{1}{x} \Leftarrow u_2'(x + 1 - x) = \frac{1}{x}$$

بالتكامل

$\boxed{u_2 = \ln x}$ $1\frac{1}{2}$ او $du_2 = \frac{dx}{x}$

$u_1' = -x u_2' = -1 \Rightarrow \boxed{u_1 = -x}$ $1\frac{1}{2}$

بالتعويض بما وجدنا في الحل الخاص للمعادلة على النحو التالي

$$y_p = -x e^{-x} + x e^{-x} \ln x = \boxed{x e^{-x}(\ln x - 1)}$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$\boxed{y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x e^{-x}(\ln x - 1)}$$

1

Question (4)

6 $\overbrace{(x^2+1)}^{a_2}y'' + xy' - y = 0$, $x=0$ is an ordinary point.

$$\frac{a_1}{a_2} = x\frac{1}{x^2+1} = x\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} \quad |x|<1$$

$$\frac{a_0}{a_2} = \frac{-1}{x^2+1} = -\sum_0^\infty x^{2n}, \quad |x|<1$$

Then the solution of the D.E is the form $y=\sum_0^\infty a_n x^n$, $|x|<1$

$$\Rightarrow (1+x^2)\sum_2^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_1^\infty n a_n x^{n-1} - \sum_0^\infty a_n x^n = 0$$

$$\sum_2^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_2^\infty n(n-1)a_n x^n + \sum_1^\infty n a_n x^n - \sum_0^\infty a_n x^n = 0$$

$n-2=k$, $n=k+2$ | $n=k$ | $n=k$ | $n=k$

$$\Rightarrow \sum_0^\infty (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_2^\infty k(k-1)a_k x^k + \sum_1^\infty k a_k x^k - \sum_0^\infty a_k x^k = 0$$

$$(2a_2 - a_0) + (6a_3 + a_1 - a_1)x + \sum_2^\infty [(k+1)(k+2)a_{k+2} + k(k-1)a_k + k a_k - a_k]x^k = 0 \quad |x|<1$$

$2a_2 - a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}a_0$, $a_3 = 0$

$$\Rightarrow a_{k+2} = \frac{-k(k-1) - k + 1}{(k+1)(k+2)}a_k \qquad +k(1-k)$$

$$a_{k+2} = \frac{(1-k)(k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k = \boxed{\frac{1-k}{k+2}a_k = \frac{a}{k+2}}, \quad k \geq 2$$

$k=2 \Rightarrow a_4 = \frac{-1}{4}a_0 = -\frac{1}{8}a_0$

$k=3 \Rightarrow a_5 = 0$, $a_7 = a_9 = \cdots = 0$

$k=4 \Rightarrow a_6 = \frac{-3}{6}a_4 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}a_0\right) = \frac{1}{16}a_0$

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2}a_0 x^2 + 0 - \frac{1}{8}a_0 x^4 + 0 + \frac{1}{16}a_0 x^6 + \cdots$

$y = a_1 \overset{y_1}{x} + a_0\left[\underbrace{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + \cdots}_{1\frac{1}{2}}\right]$ $\frac{1}{2}$

$y = a_1 y_1 + a_0 y_2$, $|x|<1$ y_2

Questions ⑤

⑧ (a) $\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}\right]$

$= \frac{s}{s^2-1};\ s>1$ 2

(b) $\frac{12}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$

$12 = As^3 + Bs^2 + 4As + 4B + Cs^3 + Ds^2 + Cs + D$

$= s^3(A+C) + s^2(B+D) + s(4A+C) + 4B+D$

$A+C=0$ $\quad \left.\begin{array}{l}A+C=0\\4A+C=0\end{array}\right\} \Rightarrow A=C=0$

$B+D=0$

$4A+C=0$ $\quad \left\{\begin{array}{l}-B-D=0\\4B+D=12\end{array}\right. \Rightarrow 3B=12 \Rightarrow B=4$

$4B+D=12$

$D=-4$

$\frac{12}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{4}{s^2+1} + \frac{-4}{s^2+4}$ 1

$Y(s) = \frac{3s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{4}{s^2+1} - 4\frac{1}{s^2+4}$

2 $= 3\frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{s^2+1} - \frac{4}{s^2+4}$

1 $\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$

$\boxed{y(t) = 3\cos t + 5\sin t - 2\sin(2t)}$

c) $\left\{\begin{array}{l} y''(t)+y(t) = 6\sin(2t) \\ y(0)=3,\ y'(0)=1\end{array}\right.$ Let $Y(s)=\mathcal{L}(y(t))$

$\mathcal{L}(y''(t)) + \mathcal{L}(y(t)) = 6\mathcal{L}(\sin 2t)$

$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + Y(s) = \frac{12}{s^2+4}$

$s^2Y(s) - 3s - 1 + Y(s) = \frac{12}{s^2+4}$, $(s^2+1)Y(s) = 3s+1+\frac{12}{s^2+4}$ 1

1 $Y(s) = \frac{3s+1}{s^2+1} + \frac{12}{(s^2+4)(s^2+1)} = 3\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{12}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$Y(s) = 3\frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{s^2+1} - \frac{4}{s^2+4}$ From (b), we have

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \boxed{y(t) = 3\cos t + 5\sin t - 2\sin(2t)}$ is the unique solution of the IVP 2