تصحيح

جامعة الملك سعود King Saud University	الاسم: .... الرقم الجامعي: .... الشعبة: ....

الاختبار القصير الأول للمقرر ٢٠٩ ريض للفصل الثاني ١٤٤٣ هـ

السؤال الأول (٤ درجات)

اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية:

أ) $\left\{\sqrt{n^2+n}-n\right\}$ (درجتان)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n}-n = \infty-\infty$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

ب) $\left\{\frac{2+\cos n}{e^n}\right\}$ (درجتان)

نستخدم نظرية الحصر: $-1 \le \cos n \le 1$ لكل n

فإن $\frac{1}{e^n} \le \frac{2+\cos n}{e^n} \le \frac{3}{e^n}$ لكل n

بما أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$ (متتالية هندسية $|r| = \frac{1}{e} < 1$)

فنستنتج أن

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2+\cos n}{e^n} = 0$$

السؤال الثاني (٤ درجات)

بيَن ان المتسلسلة التالية متقاربة وجد مجموعها $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{2}{3^{n+1}}\right]$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{2}{3^{n+1}}\right]=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]+\frac{2}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$$

- $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ متقاربة باستخدام اختبار نهاية المقارنة مع $\sum_n \frac{1}{n^2}$
- $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$ متسلسلة هندسية متقاربة لأن $|r|=\frac{1}{3}<1$

و مجموعها يساوي $\frac{1}{1-1/3}=\frac{3}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]\right)$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)\right]$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N+2}\right)=1$$

وبالتالي $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{2}{3^{n+1}}\right]$ متقاربة ومجموعها $1+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)=2$

السؤال الثالث (درجتان)

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة التالية: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ متسلسلة موجبة

حيث $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}>0$ لكل $n\geq 0$

باستخدام اختبار النسبة

$$L=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$L=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}=\frac{1}{4}<1$$

بما أن $L<1$ فإن

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ متقاربة