مبادئ الاحتمالات
Principles of Probability

الإحصاء والاحتمالات (١٢٠١ إحص)

الفصل الصيفي ١٤٣٧/١٤٣٨هـ

مبادئ الاحتمالات

- كلمة الاحتمال تستخدم للتعبير عن قياس فرصة حدوث حادثة معينة غير مؤكدة الحدوث .
- إن المقياس الكمي الذي يقيس فرصة حدوث حادثة معينة يسمى بمقياس الاحتمال وقيمة هذا المقياس تتراوح بين الصفر والواحد .
- كلما زادت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الواحد . وكلما قلت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الصفر .

التجربة العشوائية Random Experiment

التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:

- جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقا قبل إجرائها.
- لا يمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل إجرائها.
- يمكن معرفة أو قياس فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

فضاء (فراغ) العينة Sample Space

- فضاء العينة للتجربة العشوائية هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة .
- ونرمز لفضاء العينة بالرمز S ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز n(S) .
- نقطة العينة هي أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنها أي عنصر من عناصر فضاء العينة .

مثال:

إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة، فإن فضاء العينة $S = \{H , T\}$

$n(S) = 2$ ←

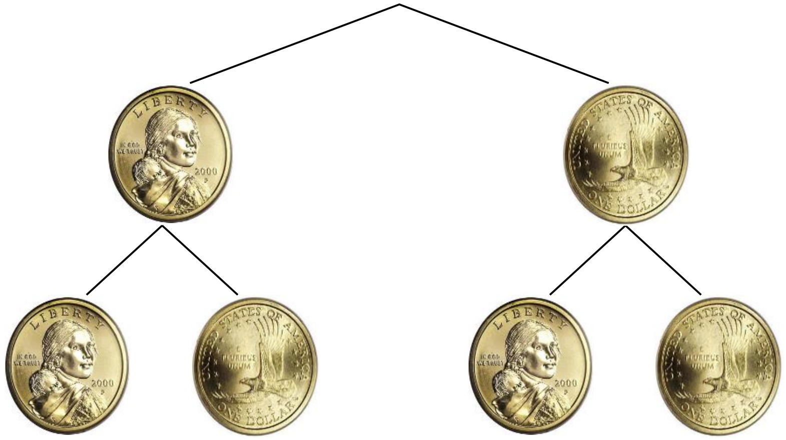
فضاء (فراغ) العينة Sample Space

مثال:

إذا ألقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين ،

فإن فضاء العينة $S = \{(H,H) , (H,T) , (T,H) , (T,T)\}$

$n(S) = 4 \leftarrow$



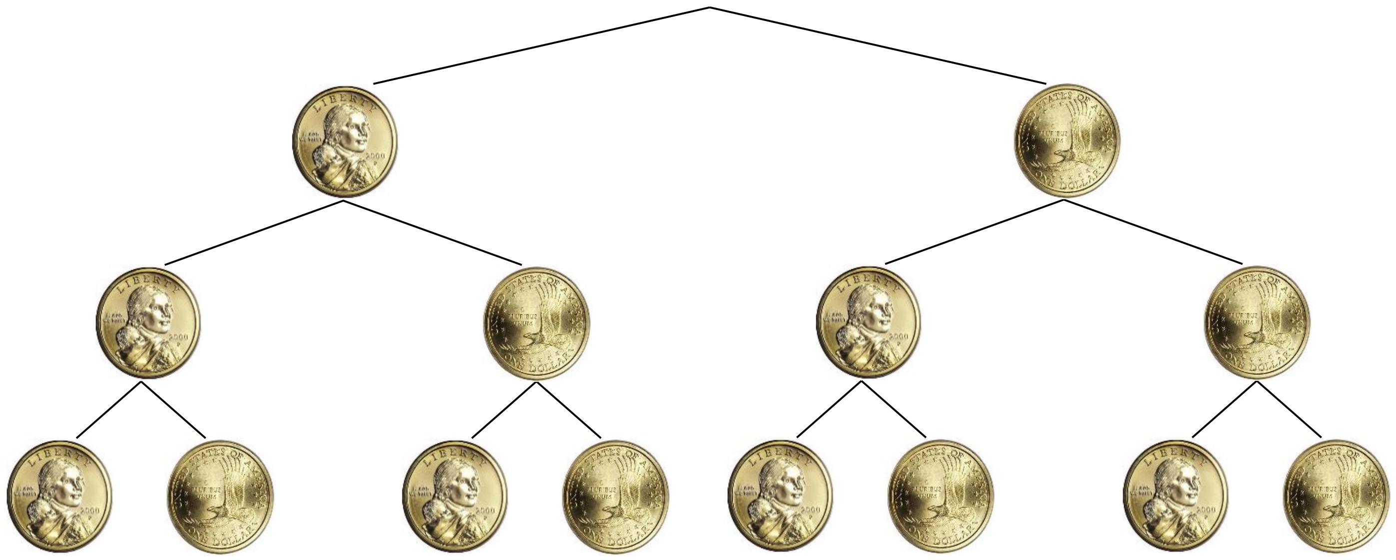
فضاء (فراغ) العينة Sample Space

مثال:

إذا ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ،

فإن فضاء العينة S = { (H,H,H) , (H,H,T), (H,T,H) , (H,T,T) , (T,H,H) , (T,H,T), (T,T,H) , (T,T,T) }

$\leftarrow$ n(S) = 8



فضاء (فراغ) العينة Sample Space

مثال:

إذا ألقي حجر النرد مرة واحدة ، فإن فضاء العينة:

$S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

$n(S) = 6 \leftarrow$

فضاء (فراغ) العينة Sample Space

مثال

إذا ألقي حجر النرد مرتين متتاليتين ، فإن فضاء العينة:

S = { (1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6)
(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6)
(3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6)
(4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) , (4,6)
(5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6)
(6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6) }

$n(S) = 36 \leftarrow$

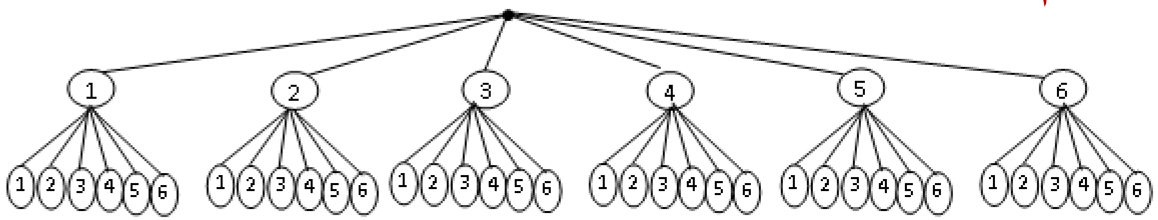
فضاء (فراغ) العينة Sample Space

<u>لإيجاد فضاء العينة:</u>

أولاً: استخدام حاصل الضرب الكارتيزي:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ثانياً: استخدام طريقة الشجرة:



ثالثاً: استخدام طريقة الجدول:

نتيجة الرمية الثانية

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

نتيجة الرمية الأولى

الحادثة أو الحدث Event

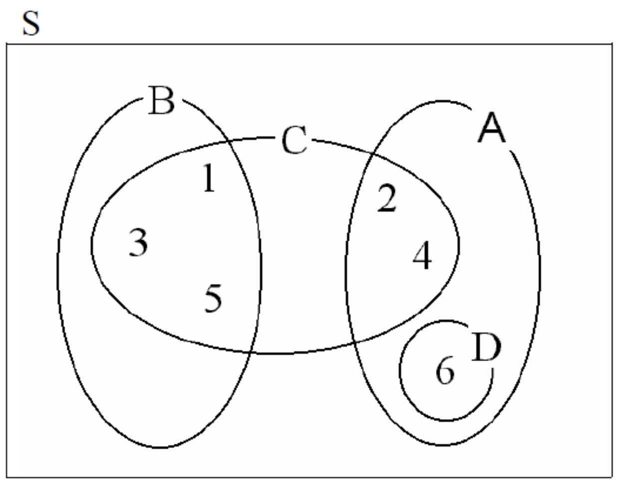
- الحادثة هي مجموعة جزئية من فضاء العينة S.
- A حادثة إذا وإذا فقط كانت $A \subseteq S$.
- يقال بأن الحادثة A وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A .
- الحادثة المستحيلة (Impossible Event) $\phi \subseteq S$ ، حيث أن ϕ هي المجموعة الخالية.
- الحادثة المؤكدة (Sure Event) $S \subseteq S$.
- يرمز لعدد عناصر الحادثة A بالرمز $n(A)$. ونقول بأن الحادثة وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A .

الحادثة أو الحدث Event

مثال:

في مثال تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي فإن المجموعات التالية تشكل حوادث لأنها مجموعات جزئية من فضاء العينة S .

الحادثة		عدد العناصر
A = { ظهور عدد زوجي } = {2, 4, 6};	$A \subseteq S$	$n(A) = 3$
B = { ظهور عدد فردي } = {1, 3, 5};	$B \subseteq S$	$n(B) = 3$
C = { ظهور عدد أقل من ستة } = {1, 2, 3, 4, 5};	$C \subseteq S$	$n(C) = 5$
D = { ظهور العدد ستة } = {6};	$D \subseteq S$	$n(D) = 1$
ϕ = { ظهور عدد سالب } = { };	$\phi \subseteq S$	$n(\phi) = 0$
S = { ظهور عدد موجب } = {1, 2, 3, 4, 5, 6};	$S \subseteq S$	$n(S) = 6$



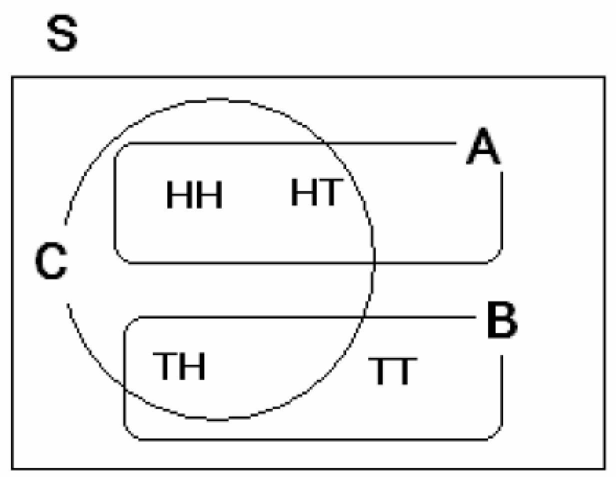
تمثيل الحوادث باستخدام أشكال فن

الحادثة أو الحدث Event

مثال:

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها ثم مثلها باستخدام أشكال فن وذلك في تجربة **قذف قطعة النقود مرتين** متتاليتين:

A = { الحصول على صورة في الرمية الأولى }
B = { الحصول على كتابة في الرمية الأولى }
C = { الحصول على صورة واحدة على الأقل }



$S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\};\ n(S)=4$

$A = \{(H,H),(H,T)\};\ n(A) = 2$

$B = \{(T,H),(T,T)\};\ n(B) = 2$

$C = \{(H,H),(H,T),(T,H)\};\ n(C) = 3$

الحادثة أو الحدث Event

مثال:

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها وذلك في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين باعتبار أن (x) يرمز لنتيجة الرمية الأولى و (y) يرمز لنتيجة الرمية الثانية:

$$A = \{ (x,y): x + y < 4 \}$$
$$B = \{ (x,y): x = y \}$$
$$C = \{ (x,y): x = 5 \}$$
$$D = \{ (x,y): x+y = 1 \}$$

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	**(5,6)**	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	**(5,5)**	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	**(5,4)**	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	**(5,3)**	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	**(5,2)**	(6,2)
(1,1)	**(2,1)**	(3,1)	(4,1)	**(5,1)**	(6,1)
⇑ A				⇑ C	

$A = \{ (x,y): x + y < 4 \} = \{(1,1), (1,2), (2,1)\};$ $n(A)=3$

$B = \{ (x,y): x = y \} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$; $n(B)=6$

$C = \{ (x,y): x =5 \} = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$; $n(C)=6$

$D = \{ (x,y): x+y =1 \} = \{ \} = \phi;$ $n(D)=0$

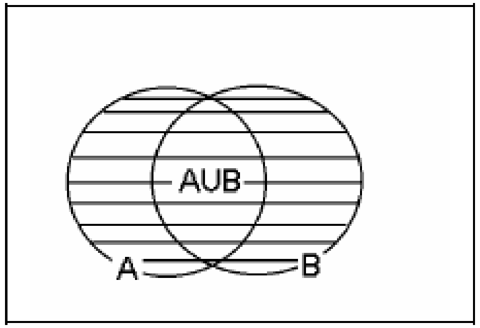
العمليات على الحوادث (جبر الحوادث) Algebra of Events

أولاً: اتحاد حادثتين (Union)

- اتحاد حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A \cup B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي لهما معاً.

- تقع الحادثة $A \cup B$ إذا وقعت إحدى الحادثتين على الأقل ، أي إذا وقعت A أو إذا وقعت B أو إذا وقعت A و B معاً.

شكل فن لتمثيل الاتحاد



$$A \cup B = \{x \in S : x \in A \ \text{أو} \ x \in B\}$$

العمليات على الحوادث Algebra of Events (جبر الحوادث)

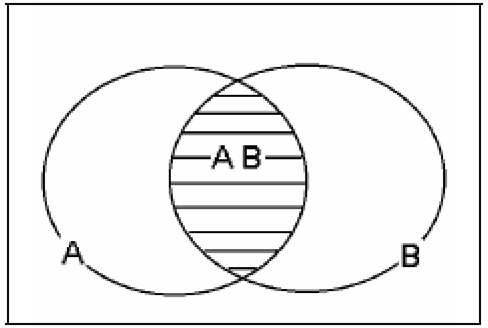
ثانياً: تقاطع حادثتين (Intersection)

- **تقاطع حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز A ∩ B أو بالرمز AB وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر المشتركة في A وفي B معاً.**

- **تقع الحادثة A ∩ B إذا وقعت الحادثتان A و B معاً في نفس الوقت.**

شكل فن لتمثيل التقاطع

$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \text{ و } x \in B\}$$



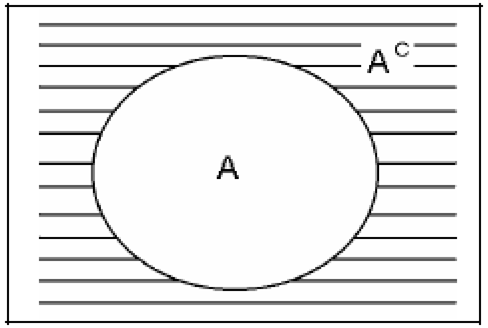
العمليات على الحوادث Algebra of Events (جبر الحوادث)

ثالثاً: متممة أو مكملة حادثة (Complement)

- متممة أو مكملة الحادثة A هي حادثة يرمز لها بالرمز A^c أو $\bar{A}$ وهي الحادثة المكونة من جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A .

- تقع متممة الحادثة $\bar{A}$ إذا لم تقع الحادثة A نفسها.

شكل فن لتمثيل المتممة



$$\bar{A} = A^C = \{x \in S : x \notin A\}$$

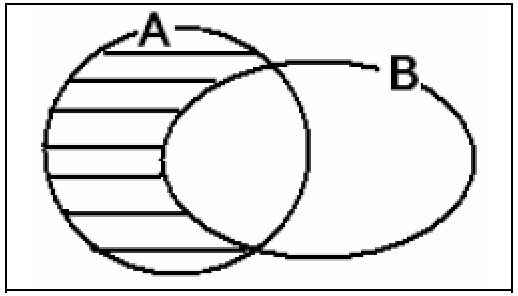
Algebra of Events (جبر الحوادث) العمليات على الحوادث

رابعاً: الفرق بين حادثتين Difference between Two Events

- الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز **A–B** وهي **الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى الحادثة A ولا تنتمي إلى الحادثة B.**

- تقع الحادثة A–B إذا وقعت الحادثة A ولم تقع الحادثة B .

شكل فن لتمثيل الفرق



$$A - B = \{x \in S:\ x \in A \ \text{و}\ x \notin B\}$$

Algebra of Events العمليات على الحوادث (جبر الحوادث)

مثال:

في مثال تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

A= {ظهور عدد زوجي}

B= {ظهور عدد فردي}

C= {ظهور عدد يقبل القسمة على ٣}

$A \cup B = \{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \phi$

$A \cup C = \{2,4,6\} \cup \{3,6\} = \{2,3,4,6\}$

$A \cap C = \{2,4,6\} \cap \{3,6\} = \{6\}$

$B \cup C = \{1,3,5\} \cup \{3,6\} = \{1,3,5,6\}$

$B \cap C = \{1,3,5\} \cap \{3,6\} = \{3\}$

$A^c = \{1,3,5\}$

$B^c = \{2,4,6\}$

$C^c = \{1,2,4,5\}$

$A - B = A$ حادثتان متنافيتان

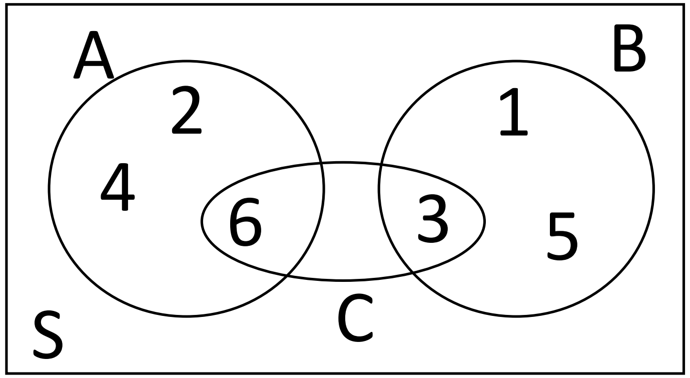
$B - A = B$ حادثتان متنافيتان

$A - C = \{2,4\}$

$C - A = \{3\}$

$B - C = \{1,5\}$

$C - B = \{6\}$

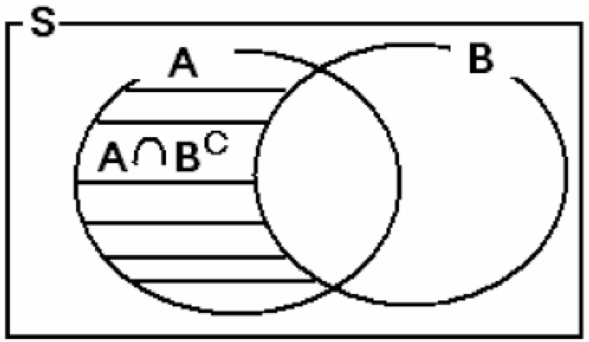


Algebra of Events (جبر الحوادث) العمليات على الحوادث

- $(A^C)^C = A$
- $S^C = \phi$
- $\phi^C = S$
- $A^C = S-A$
- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cap S = A$
- $A \cup S = S$
- $A \cap \phi = \phi$
- $A \cup \phi = A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

Algebra of Events (جبر الحوادث) العمليات على الحوادث

- $A - B = A \cap B^C$



$A-B= A\cap B^C$

قانونا دي مورجان:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Algebra of Events (جبر الحوادث) العمليات على الحوادث

مثال:

قذفت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية.

١- أكتب فراغ العينة وعدد عناصره.

٢- أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

A = الحادثة الدالة على ظهور صورة (H) في الرمية الأولى

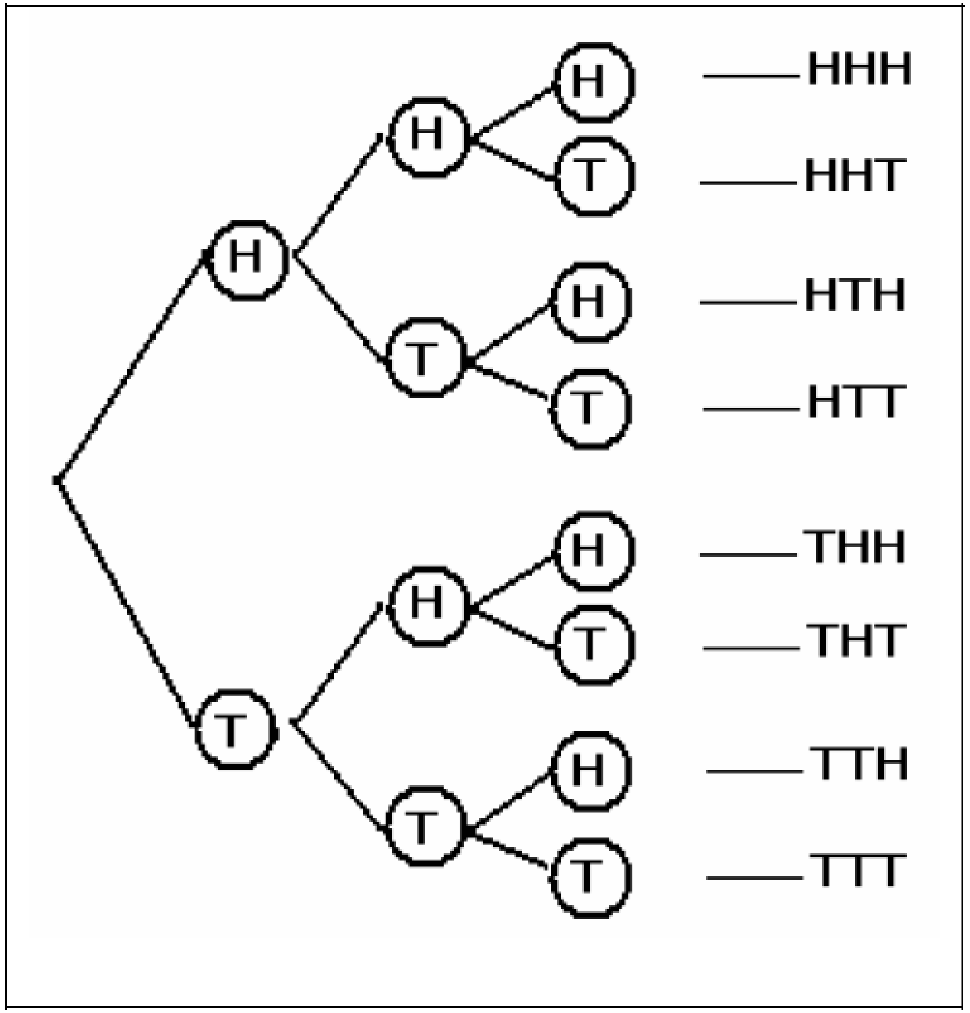
B = الحادثة الدالة على ظهور صورة (H) واحدة على الأقل

C = الحادثة الدالة على ظهور كتابة (T) في الرمية الأولى وصورة (H) في الرمية الثالثة.

٣- أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

$A \cap B$, $A \cup C$, $A^C \cup B^C$, $(A \cap B)^C$, $A \cap B^C$

Algebra of Events (جبر الحوادث) العمليات على الحوادث



١. فراغ العينة لهذه التجربة هو:

S ={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),
(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)}

عدد عناصر فراغ العينة يساوي:

$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

٢.

A={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)}

n(A) =4

B={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),
(T,H,H),(T,H,T), (T,T,H)}

n(B) =7

C={(T,H,H), (T,T,H)}

n(C) =2

Algebra of Events (جبر الحوادث) العمليات على الحوادث

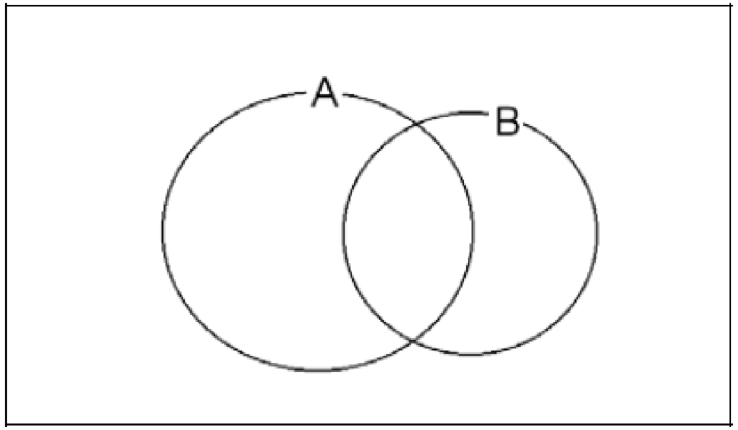
٣.

$A=\{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}$
$B=\{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H)\}$
$C=\{(T,H,H), (T,T,H)\}$
$A^C = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$
$B^C = \{(T,T,T)\}$

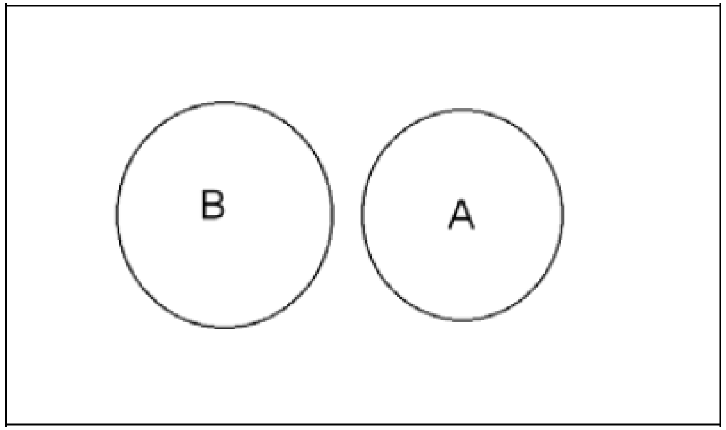
- $A\cap B = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\};$
  $n(A\cap B) = 4$
- $A\cup C = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,T,H)\};$
  $n(A\cup C)=6$
- $A^C \cup B^C = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \cup \{(T,T,T)\}$
  $= \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$;
  $n(A^C \cup B^C) = 4$
- $(A \cap B)^C= \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$;
  $n((A \cap B)^C) = 4$
- $A\cap B^C = A - B = \phi$;
  $n(A\cap B^C) = 0$

Disjoint (Mutually Exclusive) Events الحوادث المتنافية (المنفصلة)

- يقال بأن الحادثتين A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كانتا غير متقاطعتين، أي أن $A \cap B = \phi$ وهذا يعني عدم وجود عناصر مشتركة بينهما وبالتالي لا يمكن وقوعهما معاً. ولذلك فإن وقوع أحدهما ينفي وقوع الأخرى.



$A \cap B \neq \phi$ حادثتان غير متنافيتين



$A \cap B = \phi$ حادثتان متنافيتان

الحوادث الشاملة Exhaustive Events

- يقال بأن الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث شاملة إذا كان لابد من وقوع إحداها (واحده منها) على الأقل عند إجراء التجربة. أي إذا كان:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup A_n = S$$

مثال:

- في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة فإن:

الحادثتان $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ حادثتان:

متنافيتان لأن: $A \cap B \neq \phi$

شاملتان لأن: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$

الحوادث $A1=\{1,2,3\}$ و $A2=\{2,3,4\}$ و $A3=\{3,4,5,6\}$ حوادث شاملة ولكنها غير متنافية

الحالات متساوية (أو متكافئة) الفرص Equally Likely Outcomes

- إذا كانت فرصة ظهور أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية مساوية لفرصة ظهور أي نتيجة أخرى فإننا نقول بأن نتائج هذه التجربة متساوية (أو متكافئة) الفرصة.

- فمثلاً عند قذف قطعة عملة متزنة مرة واحدة فإن فرصة ظهور الصورة (H) مساوية لفرصة ظهور الكتابة (T) .

- كذلك في تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة فإن فرصة ظهور الرقم ١ مساوية لفرصة ظهور الرقم ٢ وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم ٣ وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم ٤ وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم ٥ وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم ٦.

- وعليه فإن كلا التجربتين المذكورتين متساوية الفرص.

الاحتمال Probability

احتمال الحادثة Probability of An Event

- احتمال الحادثة A هو مقياس عددي يرمز له بالرمز P(A) ويقيس فرصة وقوع الحادثة A عند إجراء التجربة. وتتراوح قيمة هذا المقياس بين الواحد الصحيح والصفر .

- إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة لها محدود ويساوي n(S) فإن احتمال الحادثة A يعرف بالصيغة التالية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } S}$$

الاحتمال Probability

مثال:

أوجد احتمال الحوادث في مثال تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة

الحل:

بما أن نتائج تجربة رمي حجر النرد المتزن متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة محدود n(S)=6 ،
فإن احتمالات الحوادث هي:

الحادثة		عدد العناصر
$A = \{$ ظهور عدد زوجي $\} = \{2, 4, 6\};$	$A \subseteq S$	$n(A) = 3$
$B = \{$ ظهور عدد فردي $\} = \{1, 3, 5\};$	$B \subseteq S$	$n(B) = 3$
$C = \{$ ظهور عدد أقل من ستة $\} = \{1, 2, 3, 4, 5\};$	$C \subseteq S$	$n(C) = 5$
$D = \{$ ظهور العدد ستة $\} = \{6\};$	$D \subseteq S$	$n(D) = 1$
$\phi = \{$ ظهور عدد سالب $\} = \{ \};$	$\phi \subseteq S$	$n(\phi) = 0$
$S = \{$ ظهور عدد موجب $\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$	$S \subseteq S$	$n(S) = 6$

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
$A = \{2, 4, 6\}$	$n(A) = 3$	$P(A) = n(A)/n(S) = 3/6 = 0.5$
$B = \{1, 3, 5\}$	$n(B) = 3$	$P(B) = n(B)/n(S) = 3/6 = 0.5$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$n(C) = 5$	$P(C) = n(C)/n(S) = 5/6 = 0.8333$
$D = \{6\}$	$n(D) = 1$	$P(D) = n(D)/n(S) = 1/6 = 0.1667$
$\phi = \{ \}$	$n(\phi) = 0$	$P(\phi) = n(\phi)/n(S) = 0/6 = 0.0$
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$n(S) = 6$	$P(S) = n(S)/n(S) = 6/6 = 1.0$

الحادثة أو الحدث Event

مثال:

احسب احتمالات الحوادث التالية لتجربة قذف قطعة النقود المتزنة مرتين متتاليتين:

A = { الحصول على صورة في الرمية الأولى }

B = { الحصول على كتابة في الرمية الأولى }

C = { الحصول على صورة واحدة على الأقل }

الحل:

بما أن نتائج تجربة قذف قطعة النقود المتزنة متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة محدود فإن احتمالات الحوادث هي:

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
A = {(H,H),(H,T)}	n(A) = 2	P(A) = n(A)/n(S) = 2/4 =0.5
B = {(T,H),(T,T)}	n(B) = 2	P(B) = n(B)/n(S) = 2/4 =0.5
C = {(H,H),(H,T),(T,H)}	n(C) = 3	P(C) = n(C)/n(S) = 3/4 =0.75

مسلمات (بديهيات) الاحتمال Axioms of Probability

- لكل حادثة A يكون: $P(A) \geq 0$
- $P(S) = 1$
- احتمال الحادثة المستحيلة يساوي الصفر، أي أن:

$$\boxed{P(\phi) = 0}$$

- إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث متنافية (منفصلة) تبادليًا فإن:

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- لأي حادثة A يكون:

$$\boxed{P(A^C) = 1 - P(A)}$$

مسلمات (بديهيات) الاحتمال Axioms of Probability

- لأي حادثتين A و B يكون:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

- لأي حادثتين A و B يكون:

$$\boxed{\begin{array}{c} P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) \\ \Leftrightarrow \\ P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) \end{array}}$$

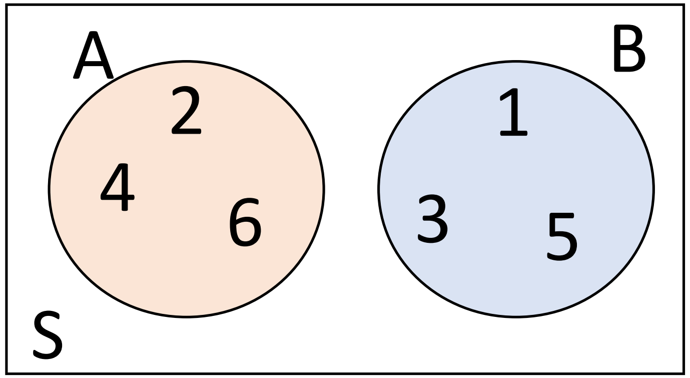
- إذا كان $A \subseteq B$ فإن $P(A) \leq P(B)$

مسلمات (بديهيات) الاحتمال Axioms of Probability

الخلاصة:

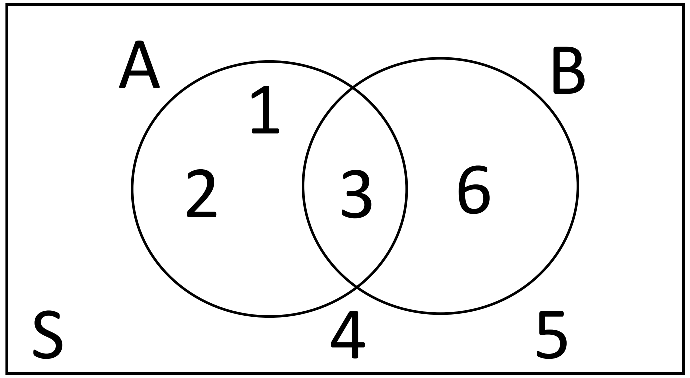
$P(A^c) = 1 - P(A)$

$P(B^c) = 1 - P(B)$



A و B حادثتان متنافيتان:

$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



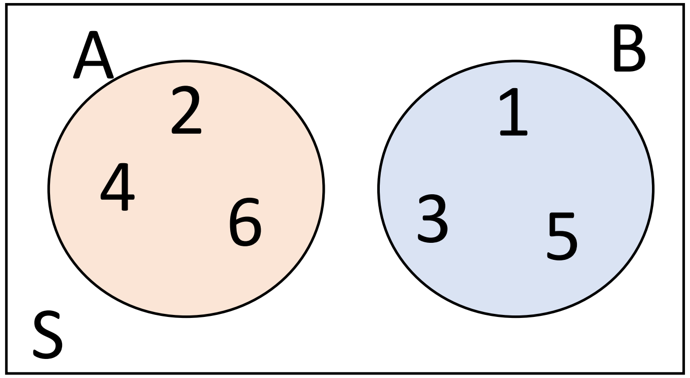
A و B حادثتان غير متنافيتين:

$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$\rightarrow P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

Axioms of Probability مسلمات (بديهيات) الاحتمال

مثال:



$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$

$P(B) = \frac{3}{6} = 0.5$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$\rightarrow P(A^c) = 1 - 0.5 = 0.5$

$P(B^c) = 1 - P(B)$

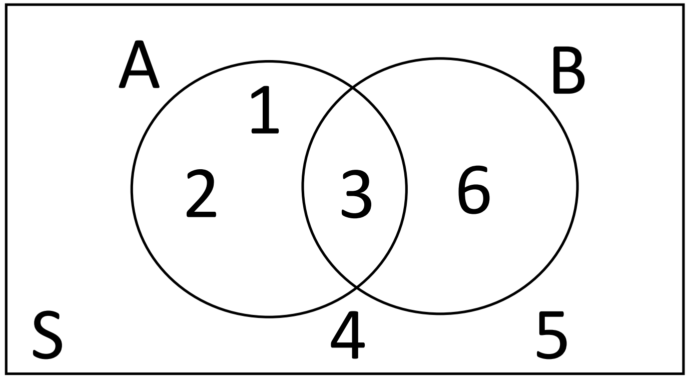
$\rightarrow P(B^c) = 1 - 0.5 = 0.5$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\rightarrow P(A \cup B) = 0.5 + 0.5 = 1$

Axioms of Probability مسلمات (بديهيات) الاحتمال

مثال:



$P(A) = \frac{3}{6}$

$P(B) = \frac{2}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$\rightarrow P(A^c) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$

$P(B^c) = 1 - P(B)$

$\rightarrow P(B^c) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

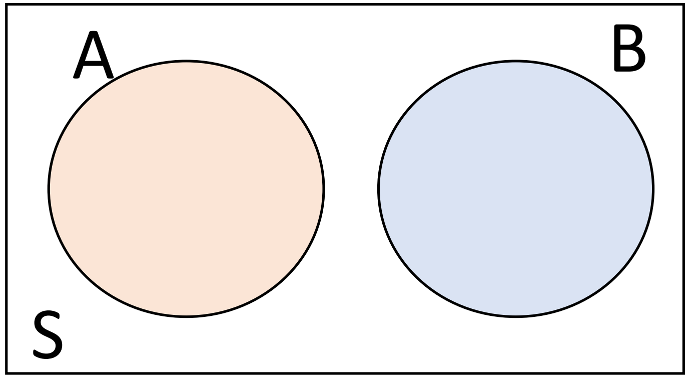
$\rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

$\rightarrow P(A \cap B^c) = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

Axioms of Probability مسلمات (بديهيات) الاحتمال

مثال:



$P(A) = 0.6$

$P(B) = 0.3$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$\rightarrow P(A^c) = 1 - 0.6 = 0.4$

$P(B^c) = 1 - P(B)$

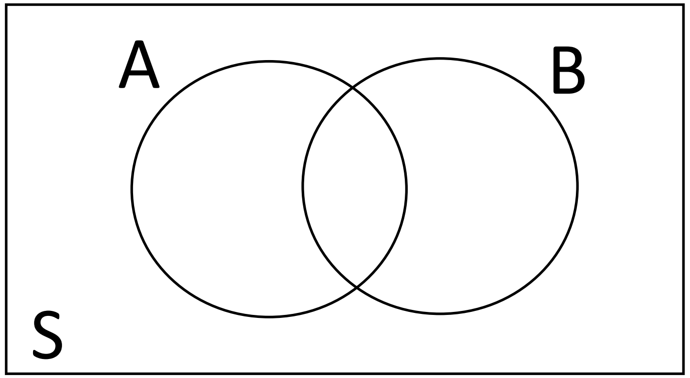
$\rightarrow P(B^c) = 1 - 0.3 = 0.7$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\rightarrow P(A \cup B) = 0.6 + 0.3 = 0.9$

Axioms of Probability مسلمات (بديهيات) الاحتمال

مثال:



$P(A) = 0.6$

$P(B) = 0.3$

$P(A \cap B) = 0.1$

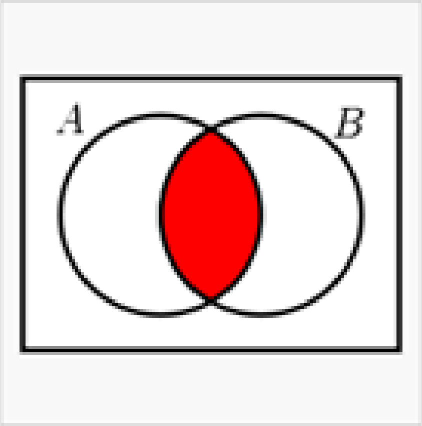
$P(A^c) = 1 - P(A)$
$\rightarrow P(A^c) = 1 – 0.6 = 0.4$

$P(B^c) = 1 - P(B)$
$\rightarrow P(B^c) = 1 – 0.3 = 0.7$

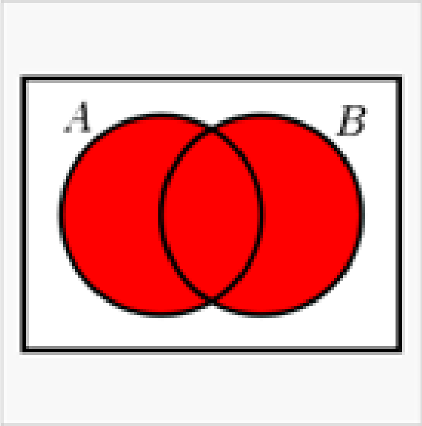
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$
$\rightarrow P(A \cup B) = 0.6 + 0.3 - 0.1 = 0.8$

$P(A \cap B^c) = P(A) – P(A \cap B)$
$\rightarrow P(A \cap B^c) = 0.6 - 0.1 = 0.5$

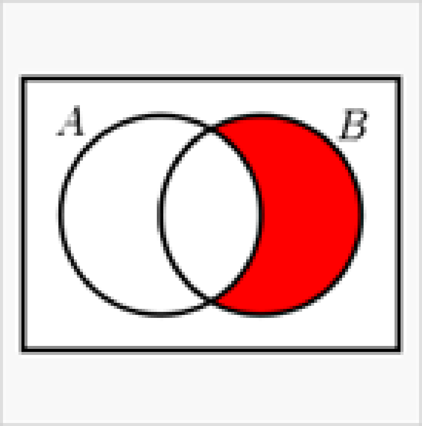
Venn Diagram أشكال فن



Intersection of two sets
$A \cap B$

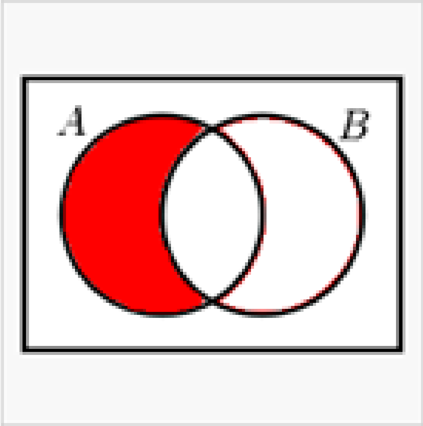


Union of two sets
$A \cup B$



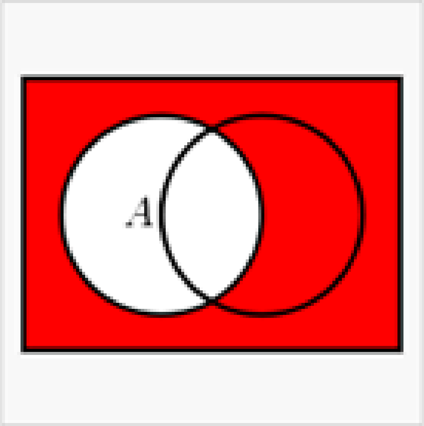
Relative complement of A (left) in B (right)
$A^c \cap B$

$A^c \cap B = B - A$



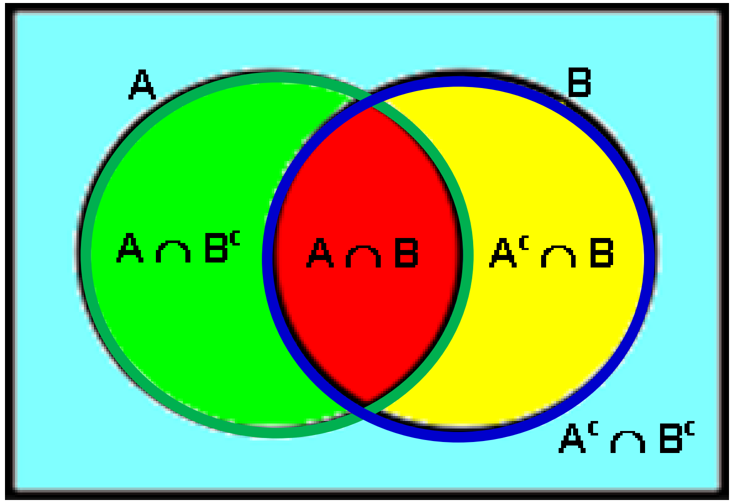
Relative complement of A (left) in B (right)
$A \cap B^c$

$A \cap B^c = A - B$



Absolute complement of A
A^c

Venn Diagram أشكال فن

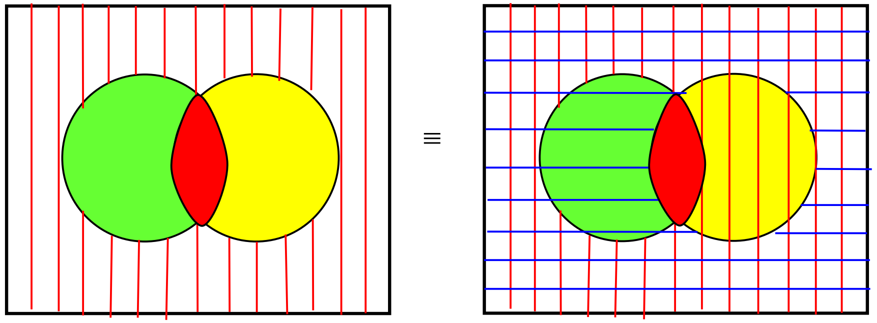


$A - B = A \cap B^c$
$B - A = A^c \cap B$

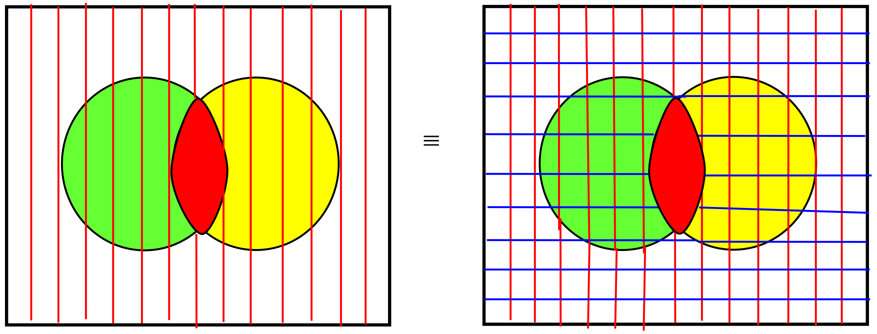
Venn Diagram أشكال فن

De Morgan's Laws:

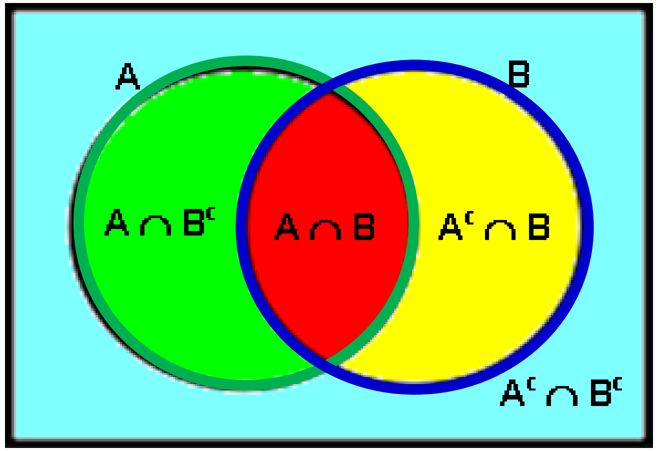
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



Venn Diagram أشكال فن



- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$
- $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B)$
  $= P(B) + P(A \cap B^C)$
  $= P(A \cap B^C) + P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$
- $P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B)$

الاحتمال Probability

مثال:

$P(A^C)$ $P(A)$

إذا كان احتمال نجاح محمد في مقرر الإحصاء يساوي 0.6 فأوجد احتمال رسوبه.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

$A=$ {نجاح محمد في مقرر الإحصاء}

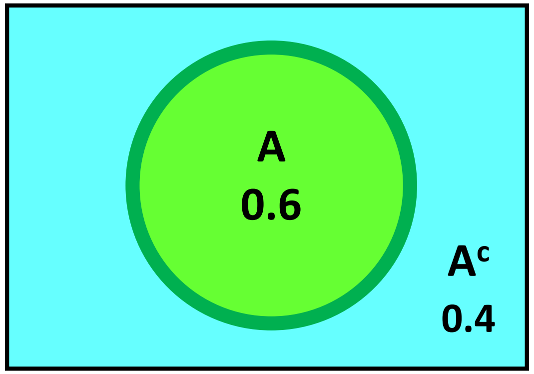
$A^C =$ {نجاح محمد في مقرر الإحصاء}^{C} $=$ {عدم نجاح محمد في مقرر الإحصاء}

$=$ {رسوب محمد في مقرر الإحصاء}

المعطيات: $P(A) = 0.6$

المطلوب:

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$



الاحتمال Probability

<u>مثال:</u>

P(A) $P(A \cap B)$

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.6 واحتمال نجاح محمد وأحمد معًا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد. $P(A \cap B^C)$

<u>الحل:</u>

لنعرف الحوادث التالية:

A= {نجاح محمد في الاختبار}

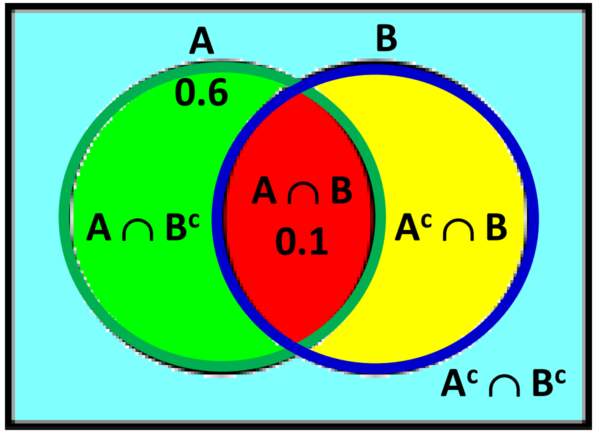
B = { نجاح أحمد في الاختبار}

$A \cap B$ = { نجاح محمد وأحمد معًا في الاختبار}

B^C = { رسوب أحمد في الاختبار}

$A \cap B^C$ = { نجاح محمد ورسوب أحمد في الاختبار}

المعطيات: $P(A) = 0.6$ و $P(A \cap B) = 0.1$



المطلوب:

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.1 = 0.5$$

الاحتمال Probability

<u>مثال:</u>

$P(B^c)$ $P(A)$ $P(A \cap B)$

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.25 واحتمال رسوب أحمد في هذا الاختبار يساوي 0.3 واحتمال نجاح محمد وأحمد معًا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

<u>الحل:</u>

لنعرف الحوادث التالية:

A= {نجاح محمد في الاختبار}

B = { نجاح أحمد في الاختبار}

$A \cap B$ = { نجاح محمد وأحمد معًا في الاختبار}

B^C = { رسوب أحمد في الاختبار}

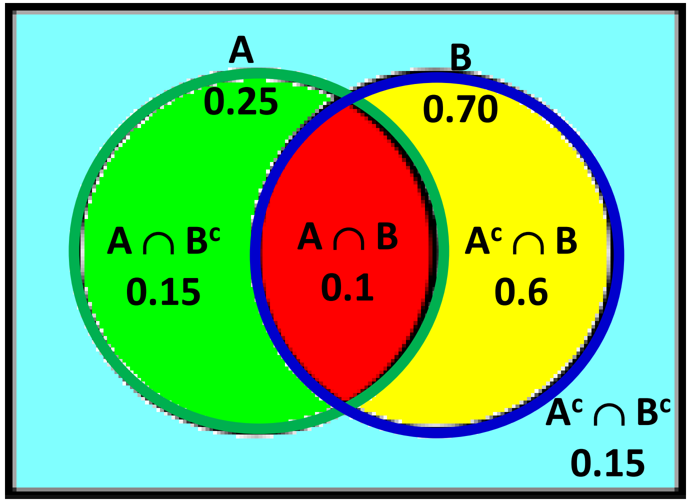
$A \cup B$ = {نجاح محمد أو نجاح أحمد في الاختبار } = { نجاح أحدهما على الأقل }

المعطيات: $P(A) = 0.25$ و $P(B^C) = 0.3$ و $P(A \cap B) = 0.1$

$P(B) = 1 – P(B^C) = 1 – 0.3 = 0.7$

المطلوب:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B) = 0.25 + 0.7 – 0.1 = 0.85$



الاحتمال Probability

<u>مثال:</u>

$P(A)$

إذا كان احتمال أن فصيلة دم أحد المتبرعين بالدم تكون من النوع A هو 0.35 واحتمال أن هذا

$P(A \cup B)$ $P(B)$

المتبرع مصاب بضغط الدم هو 0.15 واحتمال أن هذا المتبرع مصاب بضغط الدم أو أن فصيلة دمه من النوع A هو 0.40. أوجد احتمال أن هذا المتبرع:

١. مصاب بضغط الدم وفصيلة دمه من النوع A. $P(A \cap B)$

٢. غير مصاب بضغط الدم. $P(B^c)$

<u>الحل:</u>

لنعرف الحادثتين: A: فصيلة دم المتبرع من النوع A.

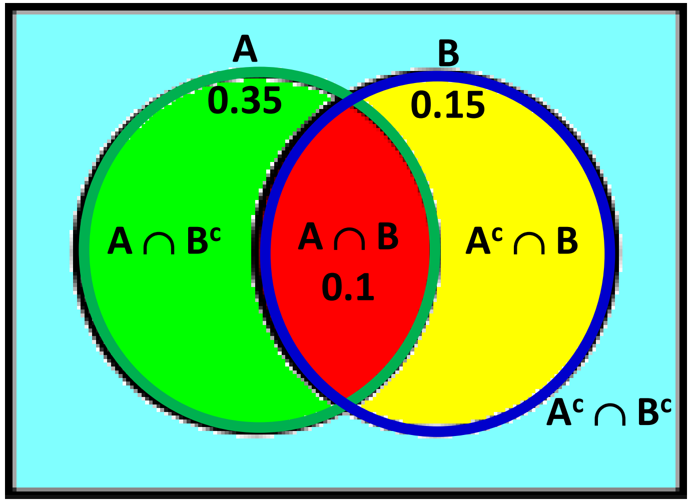
B: المتبرع مصاب بضغط الدم.

المعطيات: $P(A \cup B) = 0.40, \quad P(B) = 0.15, \quad P(A) = 0.35$

المطلوب:

١. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.35 + 0.15 - 0.40 = 0.10$

٢. $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0.15 = 0.85$



الاحتمال Probability

مثال:

في تجربة رمي حجر نرد متزن مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلــوي لنعــرف الحوادث التالية:

A: الحادثة الدالة على ظهور عدد زوجي

B: الحادثة الدالة على ظهور عدد أقل من أو يساوي 2

عرف الحوادث التالية واحسب احتمالها:

$A, B, A\cap B, A\cup B, A\cap B^C, A^C\cap B, (A\cup B)^C, A^C\cap B^C$

الحل:

فضاء العينة لهذه التجربة هو $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وهي تجربة متساوية الفــرص وعــدد عناصر فضاء العينة محدود ويساوي $n(S) = 6$.

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
$A=\{2,4,6\}$	$n(A) = 3$	$P(A) = n(A)/n(S) = 3/6$
$B=\{1, 2\}$	$n(B) = 2$	$P(B) = n(B)/n(S) = 2/6$
$A\cap B=\{2\}$	$n(A\cap B) = 1$	$P(A\cap B) = n(A\cap B)/n(S) = 1/6$
$A\cup B=\{1,2,4,6\}$	$n(A\cup B) = 4$	$P(A\cup B) = n(A\cup B)/n(S) = 4/6$
$A\cap B^C=\{4,6\}$	$n(A\cap B^C) = 2$	$P(A\cap B^C) = n(A\cap B^C)/n(S) = 2/6$
$A^C\cap B=\{1\}$	$n(A^C\cap B)=1$	$P(A^C\cap B) = n(A^C\cap B)/n(S) = 1/6$
$(A\cup B)^C=\{3,5\}$	$n((A\cup B)^C) = 2$	$P((A\cup B)^C) = n((A\cup B)^C)/n(S) = 2/6$
$A^C\cap B^C=\{3,5\}$	$n(A^C\cap B^C) = 2$	$P(A^C\cap B^C) = n(A^C\cap B^C)/n(S) = 2/6$

Probability الاحتمال

مثال:

إذا كانت A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة بحيث:

$$P(A) = 0.2,\ \ P(B) = 0.4,\ P(A \cup B) = 0.5$$

أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(A \cap B),\ \ P(A \cap B^C),\ \ P(A^C \cap B),\ \ P(A^C \cap B^C)$$

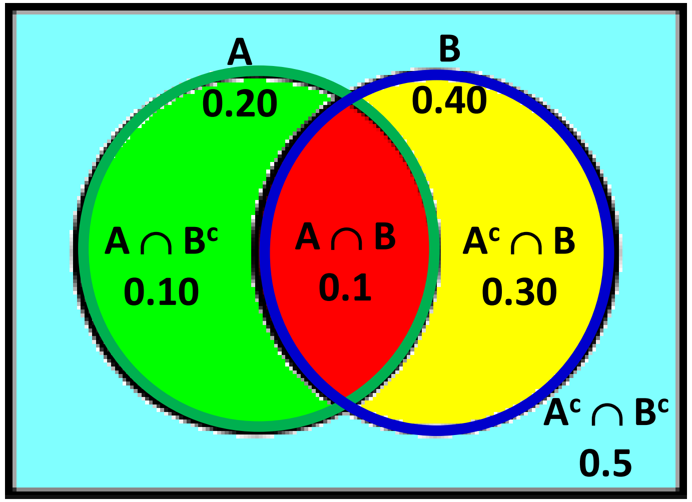
الحل:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$$

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0.2 - 0.1 = 0.1$$

$$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3$$

$$P(A^C \cap B^C) = P(\ (A \cup B)^C\ ) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.5 = 0.5$$



الاحتمال Probability

مثال:

إذ اخترنا ورقتين من أوراق اللعب بشكل عشوائي وبدون مراعاة الترتيب فما هو احتمال أن يكون لوناهما أسود؟

الحل:

عدد الأوراق الكلية = 52 ورقة

عدد الأوراق التي لونها أسود = 26 ورقة

التجربة هي اختيار ورقتين من 52 ورقة

باستخدام قانون التوافيق فإن:

$n(S)$ = عدد عناصر فضاء العينة = عدد طرق اختيار ورقتين من 52 ورقة $= \binom{52}{2}$

لتكن الحادثة A هي الحادثة الدالة على الحصول على ورقتين لونهما أسود

باستخدام قانون التوافيق فإن:

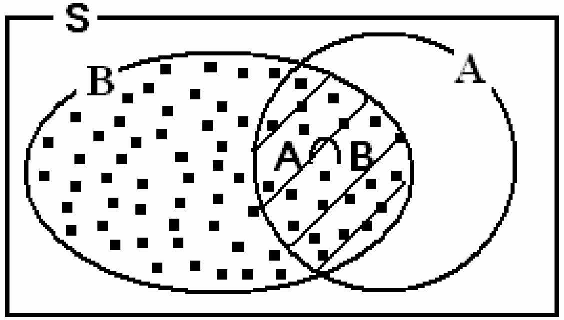
$n(A)$ = عدد عناصر الحادثة A = عدد طرق اختيار ورقتين من 26 ورقة سوداء $= \binom{26}{2}$

ولأن التجربة متساوية الفرص فإن:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\left(\frac{26!}{2! \times 24!}\right)}{\left(\frac{52!}{2! \times 50!}\right)} = \frac{\left(\frac{26 \times 25 \times 24!}{2 \times 24!}\right)}{\left(\frac{52 \times 51 \times 50!}{2 \times 50!}\right)} = \frac{26 \times 25}{52 \times 51} = 0.245$$

الاحتمال الشرطي Conditional Probability

- نرغب بإيجاد احتمال حادثة معينة A بعد معرفتنا بوقوع حادثة معينة أخرى B .
- أي أننا نكون مهتمين بإيجاد الاحتمال الشرطي للحادثة A مشروطاً بوقوع الحادثة B. فمثلاً قد نكون مهتمين بعرفة ما يلي:
  - احتمال وقوع حادث مروري لأحد السائقين إذا علمنا بأنه قد قام بالتأمين على السيارة.
  - احتمال أن يستمر أحد الأجهزة الكهربائية في العمل لمدة ١٠٠ يوماً قادمة علماً بأن هذا الجهاز ظل عاملاً لمدة ٣٠ يوماً الماضية.
  - احتمال أن يصاب الشخص بالمرض علماً بأن هذا الشخص قد تم تلقيحه ضد هذا المرض.
- يفهم مما سبق أننا نريد إيجاد احتمال الحادثة A منسوباً إلى فضاء عينة جديد هو فضاء العينة المكون من عناصر الحادثة المشروطة B.



الاحتمال الشرطي Conditional Probability

- لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S بحيث $P(B)\neq 0$. إن الاحتمال الشرطي للحادثة A علما (أو مشروطاً) بوقوع الحادثة B (أو معطى حدوث الحادثة B) يرمز له بالرمز $P(A|B)$ ويعرف كما يلي:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B).P(A|B)$$

Conditional Probability الاحتمال الشرطي

مثال:

الجدول التالي يصنف أربعمائة شخصاً حسب عادة التدخين ومستوى ضغط الدم على النحو التالي:

عادة التدخين

		يدخن D	لا يدخن D^C	المجموع
مستوى	مرتفع A	40	10	50
ضغط	متوسط B	70	130	200
الدم	منخفض C	55	95	150
	المجموع	165	235	400

ولتكن التجربة هي اختيار أحد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي. ولنعرف الحوادث التالية:

- A: حادثة اختيار شخص ضغط دمه مرتفع
- D: حادثة اختيار شخص مدخن

الاحتمال الشرطي Conditional Probability

			عادة التدخين		
			يدخن D	لا يدخن D^C	المجموع
مستوى	مرتفع	A	40	10	50
ضغط	متوسط	B	70	130	200
الدم	منخفض	C	55	95	150
	المجموع		165	235	400

- المطلوب هو إيجاد احتمال أن الشخص المختار:
- ضغط دمه مرتفع. P(A)
- مدخن. P(D)
- ضغط دمه مرتفع و يدخن. $P(A \cap D)$
- ضغط دمه مرتفع علماً بأنه مدخن. $P(A \mid D)$

الحل:

عدد نتائج التجربة $n(S) = 400$ وهي متساوية الفرص.

١. $P(A) = n(A)/n(S) = 50/400 = 0.125$

٢. $P(D) = n(D)/n(S) = 165/400 = 0.4125$

٣. $P(A \cap D) = n(A \cap D)/n(S) = 40/400 = 0.1$

٤. $P(A \mid D) = P(A \cap D) / P(D) = 0.1 / 0.4125 = 0.2424$

أو

$P(A \mid D) = n(A \cap D)/n(D) = 40/165 = 0.2424$

الحوادث المستقلة Independent Events

- في بعض الحالات يكون احتمال حدوث حادثة معينة A لا يتأثر مطلَقا بحدوث أو عدم حدوث حادثة أخرى B. أي لا فرق بين احتمال الحادثة A والاحتمال الشرطي للحادثة A معطى B .
- أي أن $P(A|B)=P(A)$. وفي هذه الحالة نقول بأن الحادثتين A و B مستقلتان.

- لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S. يقال بأن الحادثتين A و B مستقلتان إذا تحقق أحد الشروط المتكافئة التالية:

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Independent Events الحوادث المستقلة

مثال:

يحتوي صندوق على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء . اخترنا عينة مكونة من ٤ كرات من هذا الصندوق عشوائياً دون مراعاة الترتيب . أوجد احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء.

الحل:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{10}{3} \times \binom{20}{1}}{\binom{30}{4}} = 0.088$$

قانون الاحتمال الكلي Total Probability Law

لتكن الحوادث $A_1, A_2, \dots, A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة علـــى فضاء العينة S، أي أن:

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \; \dots \; \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \phi, \quad \forall \; i \neq j$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$\boxed{\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + \dots + P(A_n)\,P(B|A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B\,|\,A_k) \end{aligned}}$$

قانون الاحتمال الكلي Total Probability Law

يمكن تلخيص قانون الاحتمال الكلي بواسطة شكل الشجرة التالية (للحالة n=3):

$$A_1 \xrightarrow{P(A_1)} B \mid A_1 \xrightarrow{P(B|A_1)} \Rightarrow P(A_1)\,P(B|A_1)$$

$$A_2 \xrightarrow{P(A_2)} B \mid A_2 \xrightarrow{P(B|A_2)} \Rightarrow P(A_2)\,P(B|A_2)$$

$$A_3 \xrightarrow{P(A_3)} B \mid A_3 \xrightarrow{P(B|A_3)} \Rightarrow P(A_3)\,P(B|A_3)$$

المجموع $= P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\,P(B \mid A_k)$

قانون الاحتمال الكلي Total Probability Law

مثال:

يتم إنتاج المصباح الكهربائي في أحد المصانع بواسطة إحدى ثلاث آلات. تنتج الآلة الأولى ٢٠% من الإنتاج الكلي للمصنع، وتنتج الآلة الثانية ٣٠% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثالثة ٥٠% من الإنتاج الكلي للمصنع . ومعلوم من الخبرة السابقة أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى هي ١% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية هي ٤% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة هي ٧%. إذا كانت التجربة هي اختيار مصباح واحد من إنتاج هذا المصنع بشكل عشوائي فما هو احتمال أن يكون هذا المصباح تالف؟

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

B = {المصباح تالف}

A1 = {المصباح من إنتاج الآلة الأولى}

A2 = {المصباح من إنتاج الآلة الثانية}

A3 = {المصباح من إنتاج الآلة الثالثة}

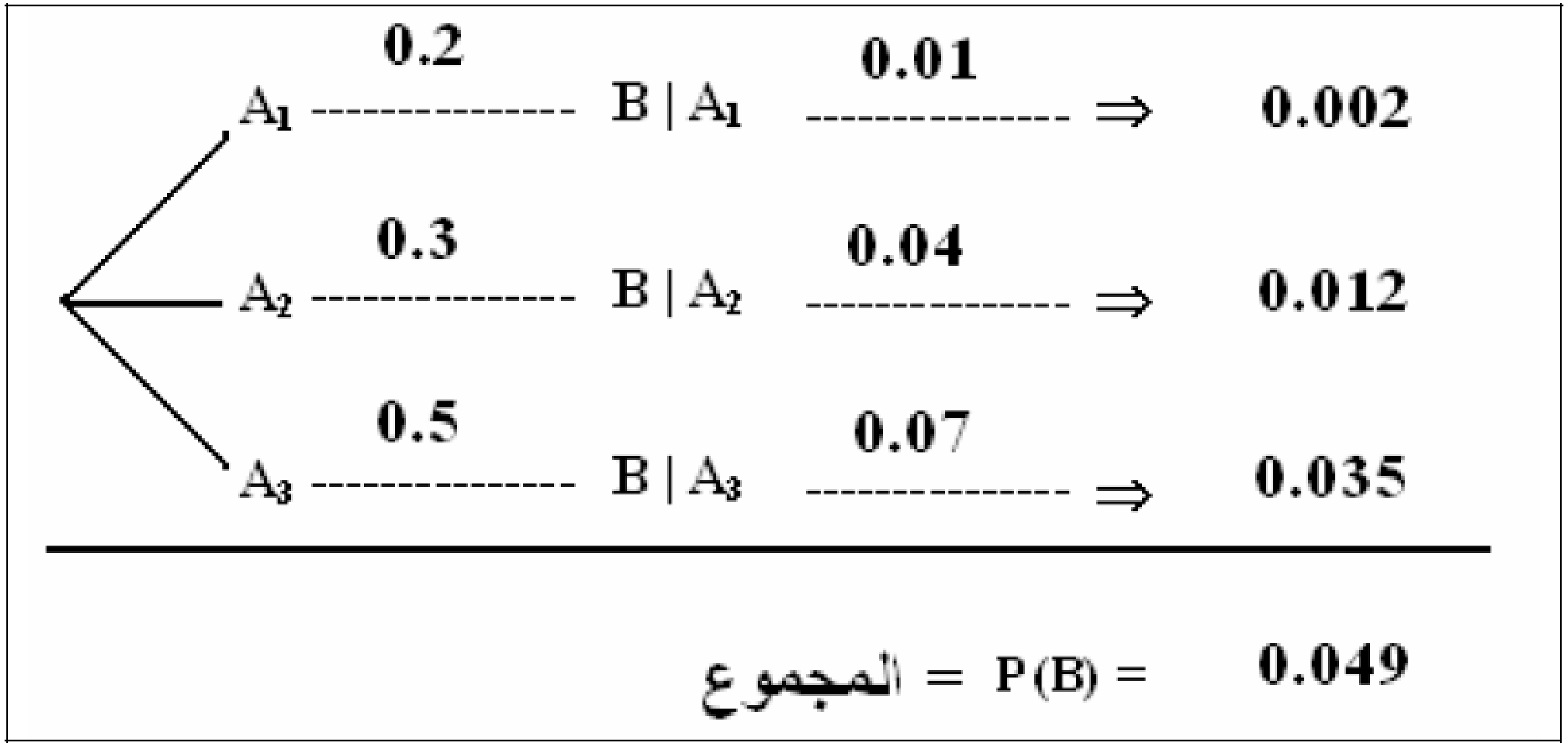
$$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0.2; \quad P(B|A_1) = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$P(A_2) = \frac{30}{100} = 0.3; \quad P(B|A_2) = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$P(A_3) = \frac{50}{100} = 0.5; \quad P(B|A_3) = \frac{7}{100} = 0.07$$

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B \mid A_k) \\
&= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + P(A_3)\,P(B|A_3) \\
&= 0.2\times0.01 + 0.3\times0.04 + 0.5\times0.07 \\
&= 0.002 + 0.012 + 0.035 \\
&= 0.049
\end{aligned}$$

قانون الاحتمال الكلي Total Probability Law



قانون الاحتمال الكلي Total Probability Law

مثال:

باعتبار المثال السابق ، لنفرض أننا علمنا أن المصباح المختار كان تالفًا، فما هو احتمال أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الأولى؟

الحل:

إن المطلوب هو إيجاد $P(A_1|B)$ وباستخدام التعريف الشرطي وقانون الضرب للاحتمال فإن:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)} = \frac{0.2 \times 0.01}{0.049} = \frac{0.002}{0.049} = 0.0408$$

$$P(B \mid A_1) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(A_1)}$$

$$\rightarrow P(B \cap A_1) = P(A_1) \times P(B \mid A_1)$$

في الصفحات القادمة، سوف يتم حل نفس المسألة باستخدام قانون بايز

قانون بايز Bayes' Theorem

لتكن الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة علـــى فضاء العينة S، أي أن:

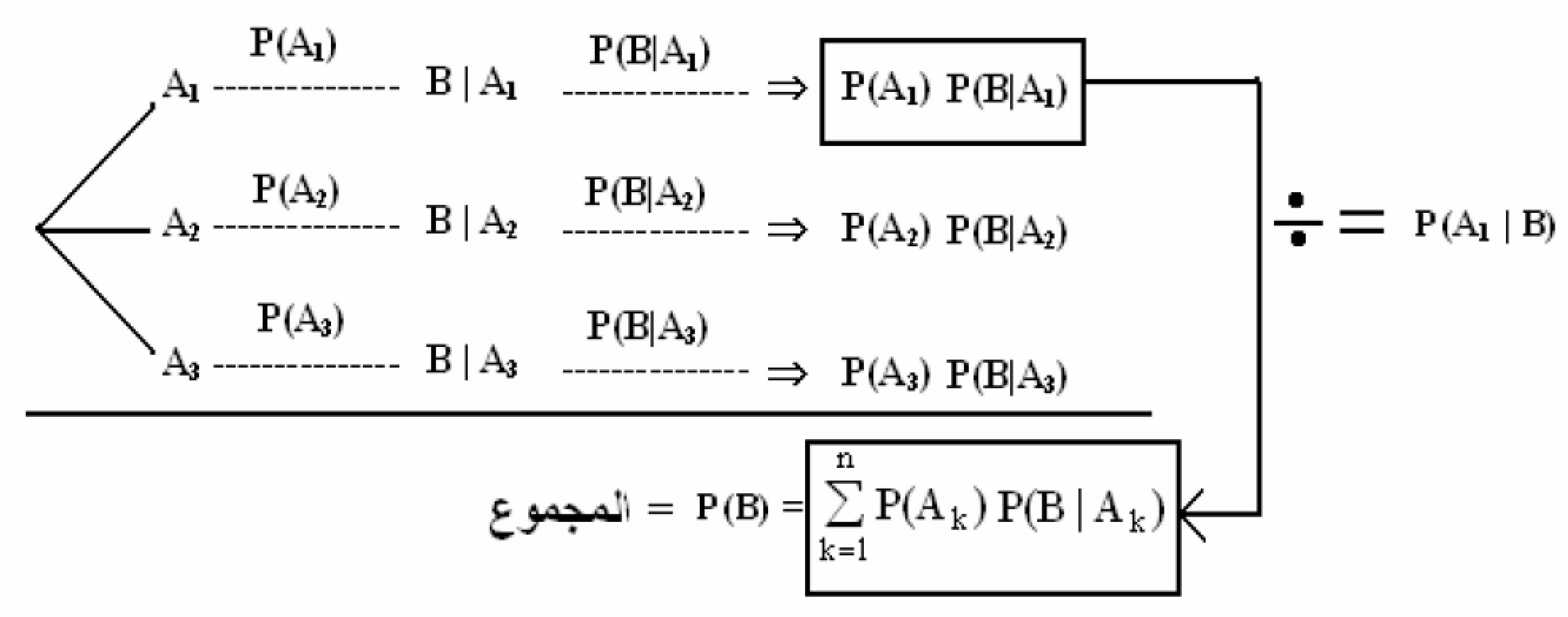
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \phi, \quad \forall\, i \neq j$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$\boxed{P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\,P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\,P(B \mid A_k)} = \frac{P(A_i)\,P(B \mid A_i)}{P(B)} \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, n}$$

Bayes' Theorem قانون بايز

يمكن تلخيص قانون بايز بواسطة شكل الشجرة التالية (للحالة n=3):



قانون بايز Bayes' Theorem

مثال:

يتم إنتاج المصباح الكهربائي في أحد المصانع بواسطة إحدى ثلاث آلات. تنتج الآلة الأولى ٢٠% من الإنتاج الكلي للمصنع، وتنتج الآلة الثانية ٣٠% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثالثة ٥٠% من الإنتاج الكلي للمصنع . ومعلوم من الخبرة السابقة أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى هي ١% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية هي ٤% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة هي ٧%. لنفرض أننا علمنا أن المصباح المختار كان تالفًا، فما هو احتمال:

1. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الأولى؟
2. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثانية؟
3. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثالثة؟

الحل:

P(B) =0.049

مثال قانون الاحتمال الكلي

1. $$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.2\times 0.01}{0.049}=\frac{0.002}{0.049}=0.0408$$

2. $$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.3\times 0.04}{0.049}=\frac{0.012}{0.049}=0.2449$$

3. $$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.5\times 0.07}{0.049}=\frac{0.035}{0.049}=0.7142$$

الجواب مطابق للحل السابق

Bayes' Theorem قانون بايز