جامعة الملك سعود
كلية العلـــــــــوم
قسم الرياضيـــــات

تمارين 151 ريض

نظرية الرسومات

GRAPH THEORY

(5.4)

(الرسومات المترابطة)

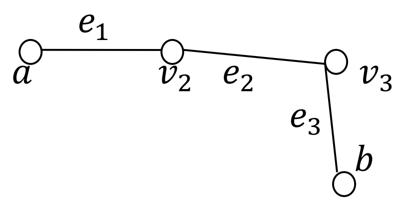
CONNECTED GRAPHS

إعداد : مالك عبدالرحمن زين العابدين

$\frac{1439 \text{ هـ}}{2018}$

ليكن $G = (V , E)$ رسماً و ليكن $a , b \in V$ ، و $n \geq 1$ عدداً صحيحاً .

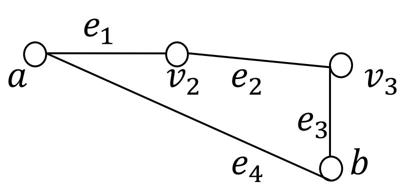
تعريف(1) : المسار: إذا كانت $v_1, e_1, v_2, \dots , e_{n-1}, v_n$ متتالية من الرؤوس و الأضلاع حيث $v_1 = a$ ، $v_n = b$ و $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ لكل i فإننا نسميها مساراً من a إلى b . (a *Walk from* a *to* b)



W: $a, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, b$ مسار من a إلى b ،

طوله : $L(W) = |E| = 3$ (فردي)

تعريف(2) : إذا كان $v_1, e_1, v_2, \dots , e_{n-1}, v_n$ مساراً بحيث $v_1 = v_n = a$ فإننا نسميه مساراً مغلقاً من a إلى a ($closed\ walk\ at\ a$)



W: $a, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, b, e_4, a$ مساراً مغلقاً من a إلى a ،

طوله : $L(W) = |E| = 4$ (زوجي)

تعريف(3) : إذا كان $v_1, e_1, v_2, \dots , e_{n-1}, v_n$ مساراً من a إلى b فإننا نسميه طريقاً ($trail$)
إذا كان $e_i \neq e_j$ لكل $i \neq j$ (لا يوجد فيه تكرار للأضلاع) .
و إذا كان الطريق مغلقاً أي $v_1 = v_n$ فإننا نسميه دارة ($circuit$) .

تعريف(4) : إذا كان $v_1, e_1, v_2, \dots , e_{n-1}, v_n$ مساراً من a إلى b فإننا نسميه ممراً ($path$)
إذا كان $v_i \neq v_j$ لكل $i \neq j$ (لا يوجد فيه تكرار للرؤوس) باستثناء $v_1 = v_n$.
و إذا كان الممر مغلقاً أي $v_1 = v_n$ فإننا نسميه دورة ($cycle$) .

ملحوظة(1): نعتبر المتتالية المكونة من رأس واحد فقط a و لا تحتوي على أية أضلاع، مساراً طوله صفر $L(W) = 0$.

ملحوظة(2): نرمز للممر المفتوح الذي يحتوي على n رأساً بالرمز P_n . كما نرمز للدورة التي تحتوي على n رأساً بالرمز C_n .
<u>لاحظ أن كل دورة هي دارة</u> و أن $L(P_n) = n - 1$ و أن $L(C_n) = n$.

مبرهنة

(أ) إذا كان $v_1, e_1, v_2, \ldots, e_{n-1}, v_n$ ممراً من a إلى b فإنه طريق من a إلى b .

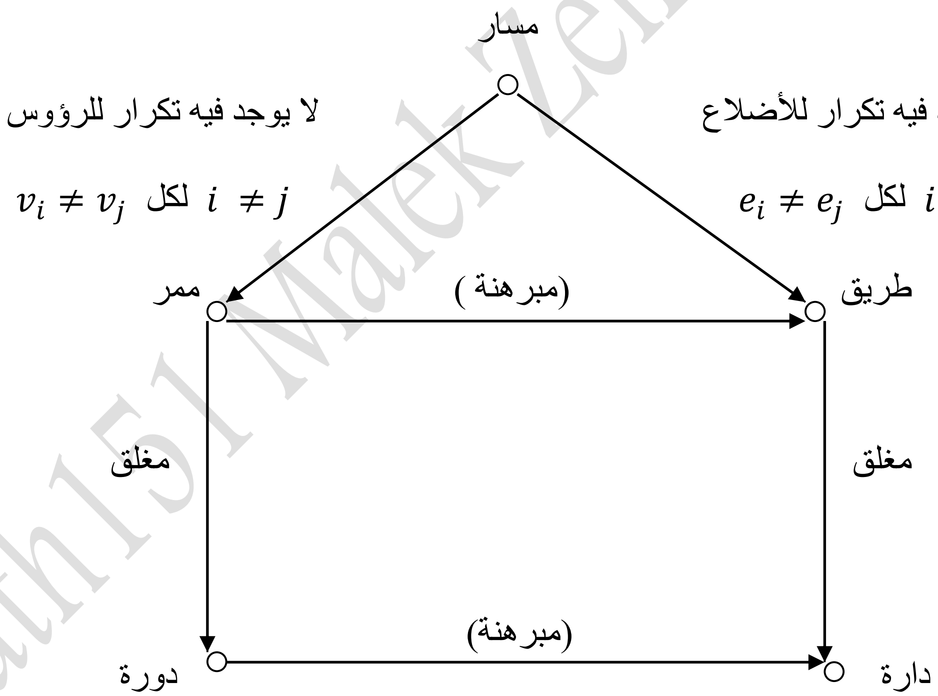
(ب) إذا كانت $v_1, e_1, v_2, \ldots, e_{n-1}, v_n$ دورة من a إلى a فإنها دارة من a إلى a.

مبرهنة

(أ) إذا وجد مسار من a إلى b فإنه يوجد ممر من a إلى b.

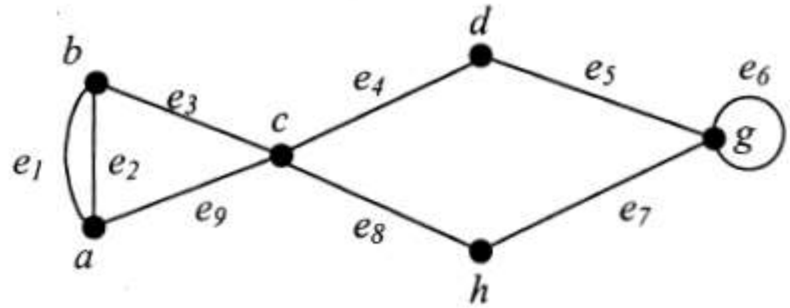
(ب) إذا وجدت دارة من a إلى a فإنه توجد دورة من a إلى a .

الشكل التالي يلخص التعاريف والمبرهنات الواردة أعلاه :



مثال

ليكن G هو الرسم المعطى في الشكل .



نلاحظ أن:

(أ) $ae_2e_3e_4e_3b$ مسار من a إلى b طوله 4 .

(ب) $ae_2e_3e_4e_5e_7e_8e_9\,a$ دارة فردية طولها 7 وليست دورة.

(ج) $ce_4e_5e_7e_8\,c$ دورة زوجية طولها 4 $\square$

مبرهنة

ليكن $G=(V,E)$ رسماً وليكن $a,b\in V$ بحيث $a\neq b$. إذا وجد ممران مختلفان من a إلى b فإن G يحتوي على دورة.

ملحوظة

ليكن $G=(V,E)$ رسماً بحيث G لا يحتوي على دورات وليكن $a,b\in V$ حيث $a\neq b$. بالاستناد إلى المكافئ العكسي للمبرهنة نخلص إلى وجود ممر واحد على الأكثر من a إلى b.

تعريف

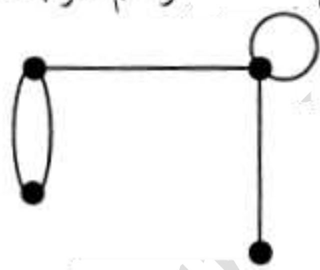
ليكن $G=(V,E)$ رسماً وليكن $a,b\in V$ بحيث $a\neq b$. نقول إن a مرتبط مع الرأس b إذا كان يوجد ممر من a إلى b . كما نقول إن G رسم مترابط *(connected)* إذا كان كل رأس من G مرتبط مع جميع رؤوس G. ونقول إن الرسم G غير مترابط *(disconnected)* إذا لم يكن مترابطاً.

ملحوظة

لاحظ أن المتتالية a المكونة من الرأس a ولا تحتوي على أية أضلاع تعتبر دورة طولها صفر وبالتالي فإن a مرتبط مع نفسه.

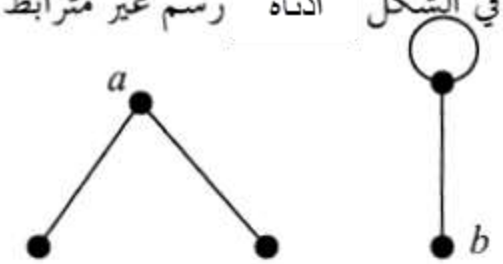
مثال

(أ)الرسم المعطى أدناه في الشكل أدناه رسم مترابط.



رسم عدد مركباته = 1 (رسم مترابط)

(ب) الرسم المعطى أدناه في الشكل أدناه رسم غير مترابط.



رسم عدد مركباته = 2 أكبر من 1 (رسم غير مترابط)

لاحظ أن a غير مرتبط بالرأس b □

مبرهنة

ليكن $G = (V, E)$ رسماً. ولتكن T علاقة على المجموعة V معرفة كالتالي:

لكل $x, y \in V$ ، xTy إذا وفقط إذا كان x مرتبطاً بالرأس y.

عندئذ، T علاقة تكافؤ على V.

تعريف

لتكن T العلاقة المعرفة في المبرهنة أعلاه . ولتكن $V_1,\dots,V_m$ فصول تكافؤ T. لكل $1 \le i \le m$ نرمز بالرمز C_i للرسم الجزئي المحدث أو المولد *(induced)* بوساطة V_i ؛ أي أن C_i هو الرسم الجزئي من G الذي رؤوسه V_i والذي أضلاعه هي جميع الأضلاع الموجودة في E والتي أطرافها تنتمي إلى V_i. يسمى C_i مركبة مترابطة *(connected component)* للرسم G.

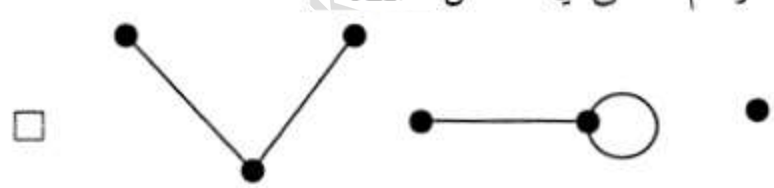
نلاحظ أن كل مركبة C_i تحقق ما يلي :

(١) C_i رسم مترابط.

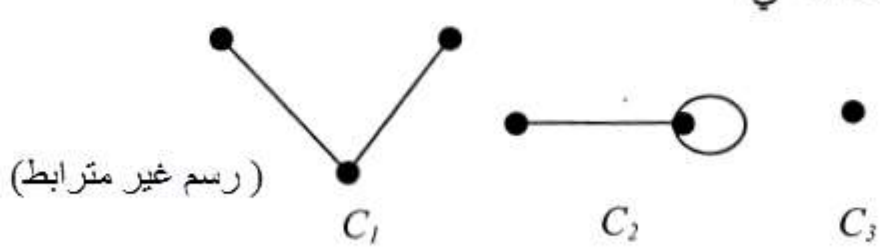
(٢) إذا كان H رسماً جزئياً مترابطاً من G وكان C_i رسماً جزئياً من H فإن $H = C_i$ (أي رؤوس H هي رؤوس C_i وأضلاع H هي أضلاع C_i).

مثال

ليكن G هو الرسم المعطى في الشكل أدناه .



عندئذ، مركبات G هي:



المبرهنة التالية تقدم لنا حداً أدنى لعدد أضلاع الرسم المترابط بدلالة عدد رؤوسه .

مبرهنة:

كل رسم مترابط عدد رؤوسه $n \ge 1$ يجب لأن يكون عدد أضلاعه أكبر من أو يساوي $n - 1$.

تعريف

ليكن $G=(V,E)$ رسماً وليكن $e \in E$. نقول إن e جسر *(bridge)* في G إذا كان عدد مركبات $G-e$ أكبر من عدد مركبات G .

مبرهنة

ليكن $G=(V,E)$ رسماً وليكن $e \in E$. عندئذ، إن e جسر في G إذا وفقط إذا كان e غير محتوى في أية دورة من دورات G .

مبرهنة

إذا كان G رسماً بسيطاً فإن G أو $\overline{G}$ رسم مترابط.

مبرهنة

لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة التجاور للرسم $G=(V,E)$ حيث $V=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ ولتكن $A^k=[b_{ij}]$ حيث $k \ge 1$. عندئذ ، عدد المسارات المختلفة من x_i إلى x_j ذات الطول k يساوي b_{ij}.

مبرهنة

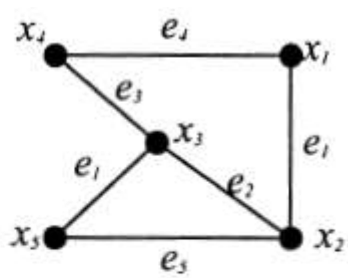
ليكن $G=(V,E)$ رسماً بحيث $V=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$. ولتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة التجاور للرسم G . ولتكن $B=[b_{ij}]$ هي المصفوفة المعرفة على النحو التالي: $B=A+A^2+\dots+A^{n-1}$.

عندئذ، G رسم مترابط إذا وفقط إذا كان $b_{ij} \neq 0$ لكل $i \neq j$.

مثال

احسب عدد المسارات من الطول 4 من x_4 إلى x_5 للرسم المبين في الشكل أدناه

Find the number of distinct walks of length 4 from x_4 to x_5 , in the given graph G



G

الحل:

مصفوفة التجاور للرسم هي: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ومنه فإن:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ وإن $$A^4 = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 7 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

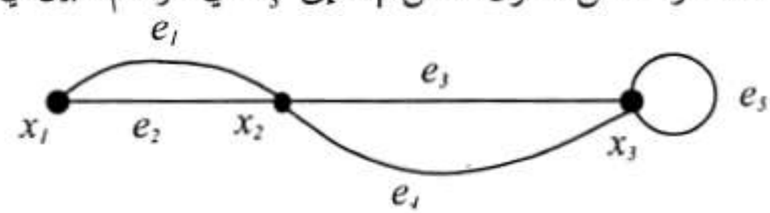
ولـــذا فإنـــه يوجد 6 مسارات من الطول 4 من x_4 إلى x_5. وبالرجوع إلى الرسم نجد أن هذه المسارات هي:

$x_4e_4e_4e_3e_6x_5$ ، $x_4e_3e_3e_3e_6x_5$ ، $x_4e_4e_1e_2e_6x_5$

$x_4e_3e_6e_6e_6x_5$ ، $x_4e_3e_6e_5e_5x_5$ ، $x_4e_3e_2e_2e_6x_5$ □

مثال

احسب عدد المسارات من الطول 3 من x_1 إلى x_3 في الرسم المبين في الشكل أدناه



الحل

مصفوفة التجاور للرسم هي:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. ولذا فإن $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 4 \\ 16 & 4 & 18 \\ 4 & 18 & 9 \end{bmatrix}$.

وبالتالي فإنه يوجد 4 مسارات من الطول 3 من x_1 إلى x_3 هي:

$x_1e_1e_3e_5x_3$ ، $x_1e_1e_4e_5x_3$ ، $x_1e_2e_3e_5x_3$ ، $x_1e_2e_4e_5x_3$ □

تعريف

ليكن x و y رأسين مترابطين في الرسم G. ولتكن $P_1, P_2, \ldots, P_k$ هي جميع الممرات بين x و y . تعرف المسافة *(distance)* بين x و y ويرمز لها بالرمز $d(x,y)$ على النحو التالي: $d(x,y) = \min\{L(P_i) : i = 1,\ldots,k\}$. أي أن $d(x,y)$ هي طول أقصر ممر بين x و y . من الواضح أن $d(x,x) = 0$.

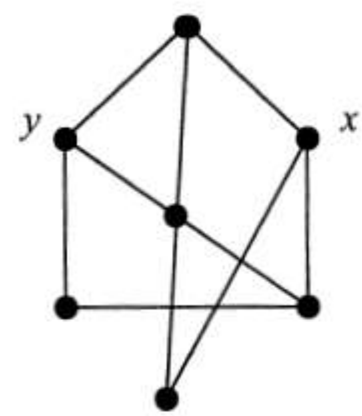
مبرهنة

يكون الرسم البسيط G ثنائي التجزئة إذا وفقط إذا كان G لا يحتوي على دورات فردية.

تمارين

(1)

في الرسم المبين في الشكل أدناه عين:



شكل (٥,٧٨)

(أ) مساراً من x إلى y بحيث لا يكون طريقاً

(ب) طريقاً من x إلى y بحيث لا يكون ممراً

(ج) ممراً من x إلى y بحيث طوله أصغر ما يمكن

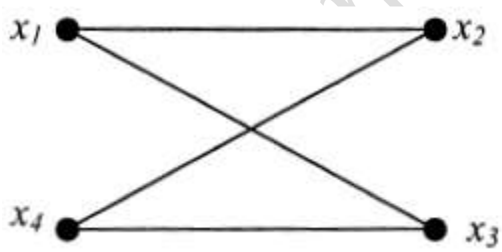
(د) ممراً من x إلى y بحيث طوله أكبر ما يمكن

(هـ) دورة عند x بحيث طولها أكبر من الصفر وأصغر ما يمكن

(و) دورة عند x بحيث طولها أكبر ما يمكن

(2) Find the number of walks of length 4 from the vertex x_1 to the vertex x_4?

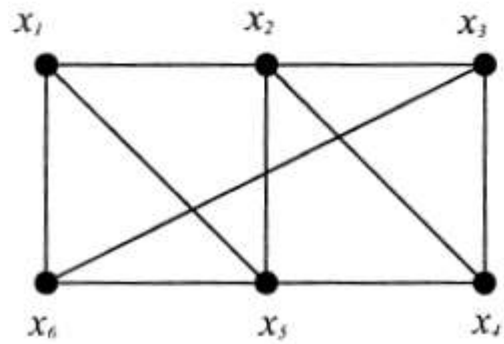
احسب عـــدد المسارات مـــن الطول 4 من x_1 إلى x_4 للرسم المبين في الشكل أدناه



الحل :

(3) Find the number of distinct walks of tall 3 and also of tall 4 from x_3 to x_6 ?

احسب عدد المسارات المختلفة من الطول 3 و كذلك من الطول 4 من x_3 إلى x_6



(4) Find the number of distinct walks for K_4 of length 2 ,and also of length 3 between any two distinct vertices ?

للرسم التام K_4 احسب عدد المسارات المختلفة بين أي رأسين مختلفين من الطول :

(أ) 2 (ب) 3

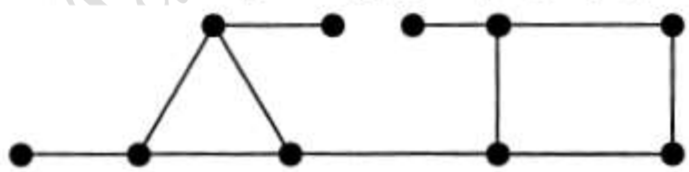
(5) Let G be a simple disconnected graph with n vertices, Prove that the greatest number of edges of G is $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$?

ليكن G رسماً بسيطاً غير مترابط، عدد رؤوسه n . أثبت أن أكبر عدد ممكن لأضلاع G هو $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

---

(6) Find all bredges in the given graph G ?

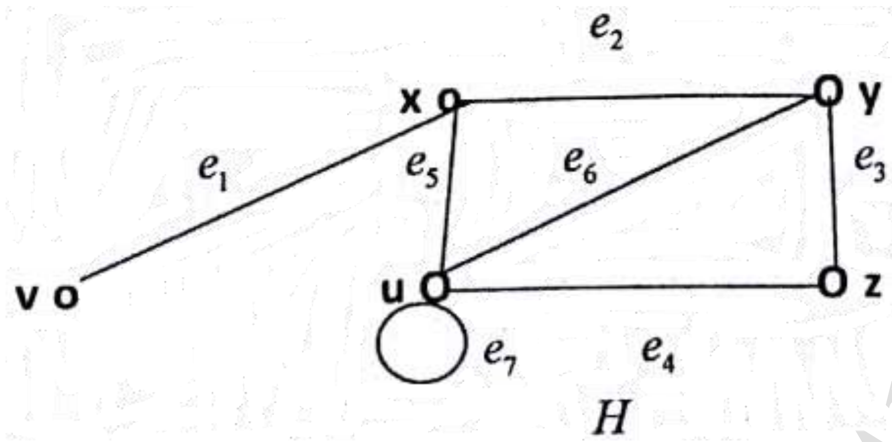
حد جميع الجسور في الرسم المعطى في الشكل أدناه



G

(7)

في الرسم H المقابل



(*i*) أوجد كل الممرات من x إلى z . Find all pathes from x to z?

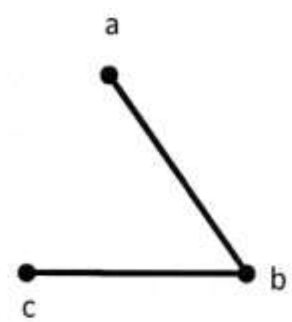
(*ii*) أوجد طريقاً من x إلى z ليس ممراً . Find a trail from x to z, but not to be a path ?

---

(8)

جد عدد المسارات المختلفة من a إلى b للرسم التالي:

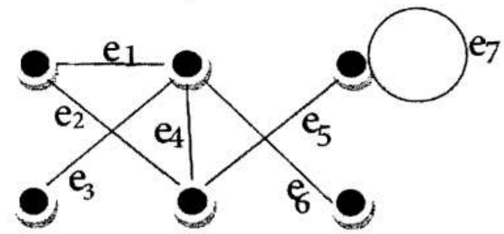
Find the number of distinct walks from a to b , in the given graph G



G

(9) Find all bredges in the given graph G ?

أوجد جسور الرسم.



G