طرق العد
Counting Techniques

الإحصاء والاحتمالات (١٢٠١ إحص)

الفصل الصيفي ١٤٣٧/١٤٣٨هـ

طرق العد

- نستخدم طرق العد لإيجاد عدد عناصر مجموعة ما دون الحاجة إلى سرد عناصرها.

- هذه الطرق تساعدنا أيضا في إيجاد عدد الطرق المختلفة والممكنة لإجراء أي تجربة وهذا بدوره يفيدنا كثيرا في دراسة علم الاحتمال.

- هناك قاعدتان أساسيتان لطرق العد هما قاعدة الضرب وقاعدة الجمع

القواعد الأساسية لطرق العد - قاعدة الضرب

إذا كان هناك عملية (أو تجربة) مكونة من عدد مقداره r من المراحل بحيث:

- المرحلة رقم ١ تتم بعدد قدره n_1 من الطرق المختلفة
- المرحلة رقم ٢ تتم بعدد قدره n_2 من الطرق المختلفة
- وهكذا . . .
- المرحلة رقم r تتم بعدد قدره n_r من الطرق المختلفة

فإن العملية ككل يمكن أجراؤها بعدد من الطرق المختلفة وقدره:

$$\boxed{n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r}$$

ملاحظة:

في طريقة الضرب يتم إجراء جميع المراحل معاً لإتمام العملية.

القواعد الأساسية لطرق العد - قاعدة الضرب

مثال:

بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب ثلاثة مقررات : الأول في الإحصاء والثاني في الرياضيات والثالث في الفيزياء إذا علم أن هناك (٣) مقررات مختلفة للإحصاء و (٢) مقررين مختلفين للرياضيات و (٢) مقررين مختلفين للفيزياء.

الحل:

العملية هي اختيار مقررات وهي مكونه من ثلاث مراحل: ٣

- المرحلة الأول = اختيار مقرر الإحصاء وعدد طرق هذه المرحلة يساوي $n_1 = 3$
- المرحلة الثانية = اختيار مقرر الرياضيات وعدد طرق هذه المرحلة يساوي $n_2 = 2$
- المرحلة الثالثة = اختيار مقرر الفيزياء وعدد طرق هذه المرحلة يساوي $n_3 = 2$

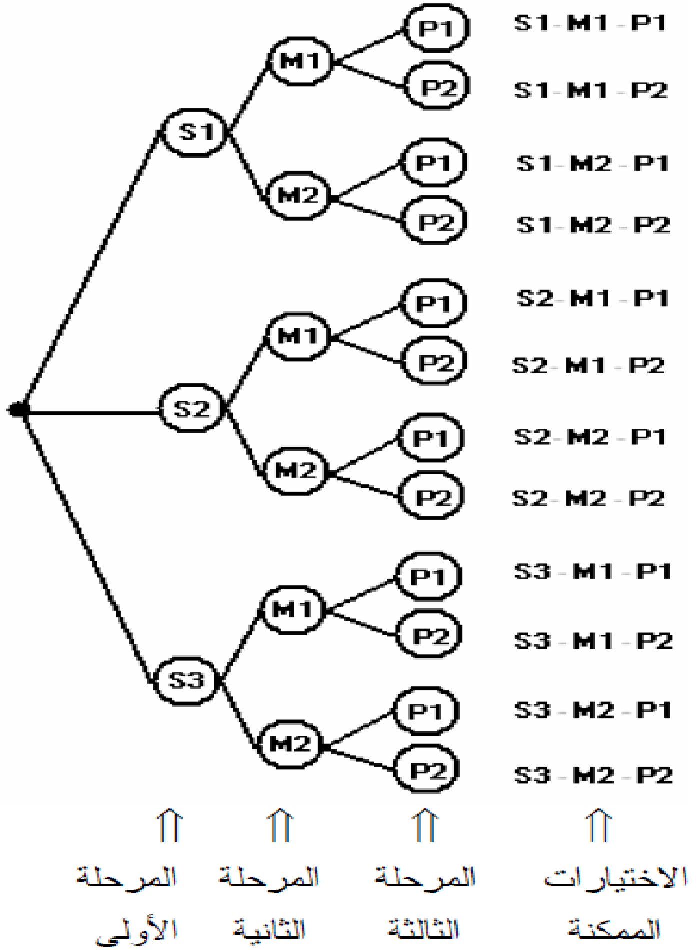
وباستخدام قاعدة الضرب فإن عدد الطريق المختلفة لاختيار المقررات الثلاثة يساوي:

$$n = n_1 \times n_2 \times n_3$$

n = ٣× ٢ × ٢ = ١٢ طريقة مختلفة

القواعد الأساسية لطرق العد ـ قاعدة الضرب

ويمكن توضيح الحل للمثال السابق باستخدام ما يسمى بشكل الشجرة البيانية كما يلي:



القواعد الأساسية لطرق العد - قاعدة الجمع

إذا كان هناك عدد مقداره r من العمليات بحيث:

- المرحلة رقم ١ تتم بعدد قدره n_1 من الطرق المختلفة
- المرحلة رقم ٢ تتم بعدد قدره n_2 من الطرق المختلفة
- وهكذا ...
- المرحلة رقم r تتم بعدد قدره n_r من الطرق المختلفة

فإن عدد الطرق المختلفة لإجراء عملية واحدة فقط من هذه العمليات (العمليات متنافية) يساوي:

$$\boxed{n = n_1 + n_2 + \dots + n_r}$$

ملاحظة:

في طريقة الجمع تكون العمليات متنافية ، أي أن إجراء إحدى العمليات ينفي (أو يمنع) إجراء العمليات الأخرى.

القواعد الأساسية لطرق العد - قاعدة الجمع

مثال:

بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب مقرراً واحداً فقط من الإحصاء أو الرياضيات أو الفيزياء إذا علم أن هناك (٣) مقررات مختلفة للإحصاء و (٢) مقررين مختلفين للرياضيات و (٢) مقررين مختلفين للفيزياء.

الحل:

العملية الأول = اختيار مقرر الإحصاء وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_1 = 3$

العملية الثانية = اختيار مقرر الرياضيات وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_2 = 2$

العملية الثالثة = اختيار مقرر الفيزياء وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_3 = 2$

وحيث أن العمليات متنافية و باستخدام قاعدة الجمع فإن عدد الطريق المختلفة لاختيار المقرر يساوي:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$

n = ٣ + ٢ + ٢ = ٧ طريقة مختلفة

التباديل Permutations

- التبديلة هي ترتيبة لعدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها في كل مرة مع مراعاة الترتيب .
- عدد التباديل لمجموعة مكونة من n من الأشياء مأخوذاً r منها في كل مرة يساوي عدد الترتيبات المختلفة التي يمكن تكوينها من n من الأشياء بحيث تحوي كل ترتيبة على r من هذه الأشياء مع مراعاة الترتيب.

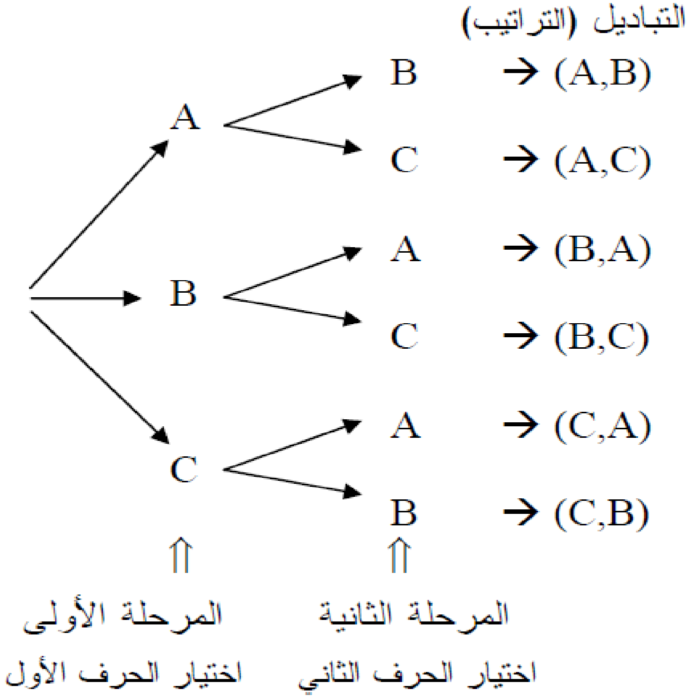
التباديل Permutations

مثال:

١- كم عدد تباديل الحروف A, B, C بحيث تحوي كل ترتيبة على حرفين مختلفين؟ أو بعبارة أخرى بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف A, B, C ؟

٢- أوجد التباديل (التراتيب) المختلفة لحرفين من الحروف A, B, C.

الحل:



مكان الحرف الثاني	مكان الحرف الأول
عدد طرق اختيار الحرف الثاني	عدد طرق اختيار الحرف الأول
$n_2=2$	$n_1=3$

- عدد التباديل للحروف A,B,C مأخوذاً حرفين في كل مرة يساوي ٣×٢ = ٦ تباديل.

Permutations التباديل

عدد تباديل n من الأشياء المختلفة مأخوذة r في كل مرة يرمز له بالرمز ${}_nP_r$ ويعطى بالــصيغة التالية:

$$\boxed{{}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)}$$

$$\boxed{{}_nP_r = \frac{n\,!}{(n-r)!}}$$

ملاحظات:

- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ (يسمى مضروب العدد)
- $0! = 1$
- ${}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$

Permutations التباديل

مثال

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$${}_5P_5 = 5! = 120$$

$${}_5P_1 = 5$$

$${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = \frac{5040}{24} = 210$$

$${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{4!} = 7\times6\times5 = 210$$

Permutations التباديل

مثال:

باستخدام قانون التباديل أوجد عدد التباديل المختلفة لحرفين من الحروف A, B, C (أو بعبارة أخرى بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف A, B, C ؟

الحل:

لدينا n=3 و r=2 وعليه فإن عدد طرق ترتيب حرفين من الحروف A, B, C يساوي:

$$ {}_{n}P_{r} = {}_{3}P_{2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3\times 2\times 1}{1} = 6 $$

Permutations التباديل

مثال:

بكم طريقة يمكن أن نجلس ٥ طلاب على ٥ مقاعد في صف واحد؟

الحل:

المقعد الخامس	المقعد الرابع	المقعد الثالث	المقعد الثاني	المقعد الأول
عدد طرق اختيار الطالب الخامس	عدد طرق اختيار الطالب الرابع	عدد طرق اختيار الطالب الثالث	عدد طرق اختيار الطالب الثاني	عدد طرق اختيار الطالب الأول
$n_5=1$	$n_4=2$	$n_3=3$	$n_2=4$	$n_1=5$

$${}_nP_r = {}_5P_5 = \frac{5!}{(5-0)!} = \frac{5!}{5!} = \frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1!} = 120$$

Permutations التباديل

مثال:

بكم طريقة يمكن أن نجلس ٥ طلاب على ٣ مقاعد في صف واحد؟

الحل:

المقعد الأول	**المقعد الثاني**	**المقعد الثالث**
عدد طرق اختيار الطالب الأول	**عدد طرق اختيار الطالب الثاني**	**عدد طرق اختيار الطالب الثالث**
$n_1=5$	$n_2=4$	$n_3=3$

$${}_nP_r = {}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times 4\times 3\times 2!}{2!} = 60$$

تطبيقات على التباديل

عملية السحب تتم بطريقتين مختلفتين : الأولى تسمى السحب بإرجاع (بإحلال أو بإعادة) والثانية تسمى السحب بدون إرجاع (بدون إحلال أو بدون إعادة).

١- السحب بإرجاع

٢- السحب بدون إرجاع

تطبيقات على التباديل - السحب بإرجاع

أولاً: السحب بإرجاع

إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة وأردنا سحب r عنصر من هذه المجموعة بإرجاع (أي أن العنصر المسحوب يعاد مرة أخرى للمجموعة قبل سحب العنصر التالي) فإن عدد الطرق المختلفة التي يتم بها هذا السحب هو:

$$\mathbf{n \times n \times \ldots \times n = n^r}$$

سحب العنصر رقم r	. . .	سحب العنصر رقم 2	سحب العنصر رقم 1
$\Uparrow$ n	. . .	$\Uparrow$ n	$\Uparrow$ n

تطبيقات على التباديل - السحب بإرجاع

مثال:

بكم طريقة يمكن سحب كرتين بإرجاع من صندوق يحتوي على كرة مختلفة؟

الحل:

الصندوق الثاني	الصندوق الأول
عدد طرق سحب الكرة الثانية $n_2=15$	عدد طرق سحب الكرة الأولى $n_1=15$

عدد سحب كرتين بإرجاع من صندوق يحتوي على ١٥ كرة مختلفة يساوي:

$$n^r = 15^2 = 15 \times 15 = 225$$

تطبيقات على التباديل - السحب بدون إرجاع

ثانياً: السحب بدون إرجاع

- إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة وأردنا سحب r عنصر من هذه المجموعة بدون إرجاع (أي أن العنصر المسحوب لا يعاد مرة أخرى للمجموعة قبل سحب العنصر التالي) فإن عدد الطرق المختلفة التي يتم بها هذا السحب هو:

$$_{n}P_{r} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$$

سحب العنصر رقم r	. . .	سحب العنصر رقم 2	سحب العنصر رقم 1
$\Uparrow$ $n-r+1$	. . .	$\Uparrow$ $n-1$	$\Uparrow$ n

تطبيقات على التباديل - السحب بدون إرجاع

مثال:

بكم طريقة يمكن سحب كرتين بدون إرجاع من صندوق يحتوي على كرة مختلفة؟

الحل:

الصندوق الثاني	الصندوق الأول
عدد طرق سحب الكرة الثانية	عدد طرق سحب الكرة الأولى
$n_2=14$	$n_1=15$

عدد سحب كرتين بدون إرجاع من صندوق يحتوي على ١٥ كرة مختلفة يساوي:

$$_nP_r = {}_{15}P_2 = \frac{15!}{(15-2)!} = \frac{15!}{13!} = \frac{15\times 14\times 13!}{13!} = 15\times 14 = 210$$

التوافيق (التواليف) Combinations

التوفيقة (التوليفة) هي كل مجموعة يمكن اختيارها من مجموعة من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها دون مراعاة الترتيب.

نتيجة:

إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة فإن عدد التوافيق التي يمكن تكوينها بحيث تحوي كل توفيقة على r عنصر يرمز له بالرمز $\binom{n}{r}$ أو بالرمز ${}_nC_r$ ويعطى بالصيغة التالية:

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad ; \quad r = 0, 1, \ldots, n$$

ملاحظات:

١. $\binom{n}{0} = 1 \quad , \binom{n}{n} = 1 \quad , \binom{n}{1} = n$

٢. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{n-r}$

Combinations (التوافيق (التواليف

<u>مثال</u>

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\times 2!} = \frac{5\times 4\times 3!}{3!\times 2!} = 10$$

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} = \frac{4!}{1\times 4!} = \frac{4!}{4!} = 1$$

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{7!\,(7-7)!} = \frac{7!}{7!\times 0!} = \frac{7!}{7!\times 1} = 1$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!\,(7-1)!} = \frac{7!}{1\times 6!} = \frac{7!}{6!} = \frac{7\times 6!}{6!} = 7$$

التوافيق (التواليف) Combinations

مثال:

بكم طريقة يمكن اختيار حرفين (بدون مراعاة الترتيب) من مجموعة الحروف A, B, C ؟

الحل:

$$\binom{n}{r} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

نلاحظ أن الاختيارات (التوافيق أو التواليف) الممكنة هي: {A,B}, {A,C}, {B,C}

إن التوفيقة أو التوليفة {A,B} هي نفس التوفيقة {B,A}

التوافيق (التواليف) Combinations

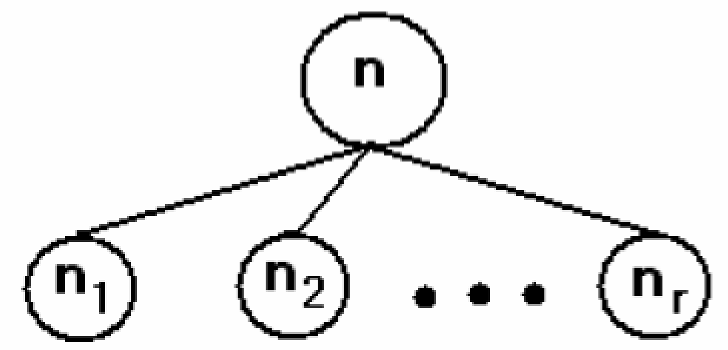
مثال:

بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث طلاب من ٥ طلاب في رحلة بحرية ؟

الحل:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10$$

التباديل داخل أشياء متشابهة (متساوية)



إذا كان هناك n من الأشياء مكونة من r مجموعة بحيث:

- المجموعة رقم ١ مكونة من n_1 من العناصر والمتشابهة
- المجموعة رقم ٢ مكونة من n_2 من العناصر والمتشابهة
- وهكذا . . .
- المجموعة رقم r مكونة من n_r من العناصر والمتشابهة

وكان $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ ، فإن عدد التباديل المختلفة الممكنة لهذه الأشياء يساوي:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

التباديل داخل أشياء متشابهة (متساوية)

مثال

بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كلمة PROBABILITY؟

الحل:

P, R, O, B, B, A, I, I, L, T, Y

عدد تباديل أوعدد طرق ترتيب أحرف كلمة PROBABILITY يساوي:

$$\binom{11}{1,1,1,2,1,2,1,1,1} = \frac{11!}{2!\ 2!} = 9979200$$

التباديل داخل أشياء متشابهة (متساوية)

<u>مثال</u>

بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كلمة STATISTICS؟

<u>الحل:</u>

S, S, S, T, T, T, A, I, I, C

عدد تباديل أوعدد طرق ترتيب أحرف كلمة STATISTICS يساوي:

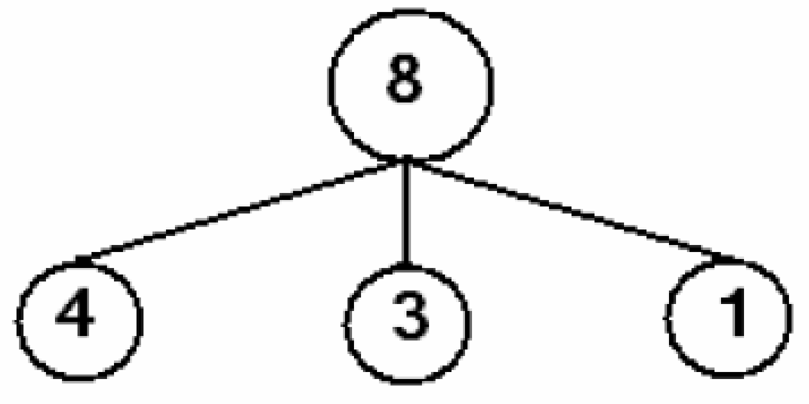
$$\binom{10}{3,\ 3,2,1,1} = \frac{10!}{3!\ 3!\ 2!} = 50400$$

التباديل داخل أشياء متشابهة (متساوية)

مثال

بكم طريقة يمكن توزيع 8 طلاب على النحو التالي: 4 طلاب لتخصص الإحصاء و 3 طـــلاب لتخصص الرياضيات و طالب واحد لتخصص الفيزياء.

الحل:



عدد الطرق لتوزيع الطلاب وفق الطريقة المذكورة يساوي:

$$\binom{8}{4,3,1} = \frac{8!}{4!\ 3!\ 1!} = 280$$