

ملاحظة: رتب أحويتك في الدفتر بحسب ترتيب ورود الأسئلة.
الرجاء إغلاق الجوال و تسليميه إلى المراقب لحين انتهاء الاختبار.

- 1- احسب جميع قيم z التي تحقق $\sin(z) = 2$.
- 2- جد جميع القيم الممكنة للتكامل $\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt$ ، حيث m و n عدادان صحيحان.
- 3- إذا كانت f دالة متصلة على المجال D بحيث $\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = 0$ لكل منحنى بسيط مغلق α
داخل D ، فأثبتت وجود دالة تحويلية (z) على D بحيث $(z) = f(z)$. هل الدالة F وحيدة؟
- 4- احسب قيمة التكامل $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^z}{z^4 - 1} dz$ ، حيث α هي الدائرة $|z| = 2$ بالاتجاه الموجب.
- 5- إذا كانت f تحويلية على القرص $D(z_0, r)$ بحيث $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ لكل z في القرص،
فأثبتت أن f لا بد أن تكون ثابتة.

1

$$\sin(z) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$

$$\Leftrightarrow e^{iz} - 4i - e^{-iz} = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 4i(e^{iz}) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{iz} = \frac{1}{2} \left(4i + \sqrt{(4i)^2 - 4(-1)(-1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

~~2z~~

$$= \frac{1}{2} \left(4i + (-12) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2i + (-3)^{\frac{1}{2}}$$

~~z~~

\sim 1

$$\Im z = \frac{1}{i} \log(2i + (-3)^{\frac{1}{2}})$$

$$= -i \log(2i \pm \sqrt{3}i)$$

$$= -i \left(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right), n \in \mathbb{Z}$$

$$= -\frac{\pi}{2} - i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

C

 : $\delta_{n,m} \sim \sqrt{1},$

$$\int_0^{2\pi} e^{int} e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt$$

$$= \frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)t} \Big|_0^{2\pi}$$

= 0

 : $\delta_{n,m} \sim \sqrt{1},$

$$\int_0^{2\pi} e^{int} e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

لما يكتب في
دالة الدايمان

٤

$$z_0 \in D \quad \text{و} \quad z_1$$

~~أي دالة دايمان في D هي دالة دايمان في D~~

في دالة دايمان في D هي دالة دايمان في D

~~و~~ z_1, z_2 هي دايمان في دالة دايمان في D

(نهاية الفصل السادس)

لذلك

$$F(z) = \int_{\alpha_2}^z f(t) dt$$

(نهاية الفصل السادس)

$$\int_{\alpha_2}^z f(t) dt = \int_{\alpha}^z f(t) dt$$

z, z_0 هي دايمان في دالة دايمان في D

$\alpha_2 \oplus (-\alpha)$

في دالة دايمان في D

لذلك

$$\int_{\alpha_2 \oplus (-\alpha)}^z f(t) dt$$

$$\int_{\alpha_2 \oplus (-\alpha)}^z f(t) dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha_2}^z f(t) dt - \int_{\alpha}^z f(t) dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha_2}^z f(t) dt = \int_{\alpha}^z f(t) dt$$

$D \ni F(z) = f(z)$ \Rightarrow F هي تابع

$$\varepsilon > 0 \quad \text{وي}$$

$D(z, |\Delta z|) \subseteq D$ $\Leftrightarrow \Delta z \in C^*$ $\forall z \in D$ وكذلك

~~لأن f هي تابع متماثل~~

(compact) \Rightarrow $D(z, |\Delta z|)$ هو مكتنف f \Rightarrow $D(z, |\Delta z|)$ هو مكتنف

~~لأن f مستمرة~~

$$\text{معنون} \delta > 0 \quad \text{وي}$$

$$|f(a) - f(b)| < \varepsilon \quad \cancel{\text{لأن}} \cancel{f \text{ مستمرة}}$$

$a, b \in D(z, |\Delta z|)$, $|a - b| \leq \delta$ \Rightarrow f مستمرة

$$|\Delta z| < \min(\delta, |\Delta z|) \quad \text{معنون} \Delta z \in C^* \quad \text{وي}$$

$z + \Delta z \rightarrow z$ \Rightarrow Δz يقتصر على العدد $\alpha_1 + \alpha_2 i$ \Rightarrow $z + \Delta z$ له نفس α_1

$$(D(z, |\Delta z|) \subseteq D \Rightarrow)$$

$z + \Delta z \rightarrow z$ له نفس α_1 , $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 i$ \Rightarrow $\Delta z = \alpha_2 i$

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{\int_B f(t) dt}{\Delta z} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \Delta z} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \Delta z} f(t) dt$$



$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{\alpha_2} f(t) dt - f(z) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{\alpha_2} f(t) dt - \frac{1}{\Delta z} \int_{\alpha_2} f(z) dt \right|$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_{\alpha_2} |f(t) - f(z)| dt \right|$$

$$< \frac{1}{|\Delta z|} \int_{\alpha_2} \epsilon dt$$

$\underset{\alpha_2 \text{ smooth}}{\nearrow}$
 $\forall z \in D(z, |\Delta z|), \forall t$
 $|\Delta z| < \delta,$

$$= \epsilon.$$

نقطة z_0 وجوارها $\{ > 0$ ~~أيضاً~~ $\sqrt{13},$

$$\cancel{F(z)}$$

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \forall |\Delta z| < \delta, \\ (\delta_1 = \min(\delta, 1, \alpha_2))$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

$$F'(z) = f(z)$$

لذلك $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ لأن كل نقطة في D , $z \in D$

~~أنا~~ ϵ

~~ج~~ ~~ج~~ ~~e^z~~

$$d = \frac{1}{3} \min \left(|1-i|, |1+i|, |1-(i)|, |1-(i)|, |1-(i)|, \right. \\ \left. |z-i|, d(1, \alpha), d(-1, \alpha), d(i, \alpha), d(-i, \alpha) \right)$$

وهي المسافة بين النقطة z والخطين x , y

$$\int_D \frac{e^z}{z^4 - 1} dz = \int_{C(1, d)} \frac{e^z dz}{z^4 - 1} + \int_{C(-1, d)} \frac{e^z dz}{z^4 - 1} + \int_{C(i, d)} \frac{e^z dz}{z^4 - 1} \\ + \int_{C(-i, d)} \frac{e^z dz}{z^4 - 1}$$

$$+ \int_{C(-1, d)} \frac{e^z dz}{z^4 - 1}$$

٢) يكتب في
هذا المقام

$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^4 - 1} dz = \int_{\gamma} \frac{e^z}{(z+1)(z+i)(z-i)} dz \in \mathcal{E}(x, R)$

لأجل المدحبي

\oint

\int

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^4 - 1} dz = \int_{\mathcal{E}(1,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z+1)(z+i)(z-i)} \right)}{z-1} dz + \int_{\mathcal{E}(-1,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z-1)(z+i)(z-i)} \right)}{z+1} dz$$

$$+ \int_{\mathcal{E}(i,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z-i)(z+i)(z-i)} \right)}{z-i} dz$$

$$+ \int_{\mathcal{E}(-i,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z-i)(z+i)(z-i)} \right)}{z+i} dz$$

لأجل المدحبي

$$\int_{\mathcal{E}(1,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z+1)(z+i)(z-i)} \right)}{z-1} dz = 2\pi i \frac{e^1}{(2)(1+i)(1-i)} = \frac{\pi i e}{2}$$

$$\int_{\mathcal{E}(-1,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z-1)(z+i)(z-i)} \right)}{z+1} dz = 2\pi i \frac{e^{-1}}{(-2)(-1+i)(-1-i)} = -\frac{\pi i e^{-1}}{2}$$

$$\int_{\mathcal{E}(-i,d)} \frac{\left(\frac{e^z}{(z-i)(z+i)(z-i)} \right)}{z+i} dz = 2\pi i \frac{e^{-i}}{(-i-1)(-i+1)(-i)} = \frac{\pi e^{-i}}{2}$$

$\mathcal{E}(-i, d)$



$$\int_{C(i, d)} \frac{\frac{e^z}{(z-1)(z+1)(z+i)}}{z-i} dz = 2\pi i \frac{e^i}{(z-1)(z+1)(2i)}$$
$$= -\frac{\pi e^i}{2}$$

: ١٣

$$\int_{\alpha} \frac{e^z}{z^2-1} dz = \frac{\pi i e}{2} - \frac{\pi i e^{-1}}{2} + \frac{\pi e^{-i}}{2} - \frac{\pi e^i}{2}$$

لا يكتب في
هذا الهاشم

~~لكل دالة~~ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ~~غير معرف~~

SF

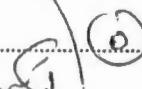
$a, b \in \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) > 0$ $\forall x \in [a, b]$

$f = 0 \Rightarrow f = 0 \quad m \quad [a, b]$

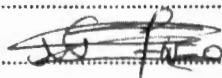
$x_0 \in (a, b)$
 $f(x_0) > 0$ $\forall x \in [a, b] \ni x_0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$
 $f(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad \text{و} \quad f(x) \neq 0$

$a, b \in \mathbb{R}$ لذلك

\exists f such that $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 

$$\therefore \int_a^b f = 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{and} \quad f(x) \geq 0$$

~~$\int_a^b f = 0$~~ 

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0$$

البرهان

$\exists x_0 \in [a, b]$ such that $x_0 \in (a, b)$ 

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a, b] \text{ such that } \delta > 0 \text{ and } \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad f(x) > 0$$

$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad f(x) \neq 0$

$$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Since f is continuous at x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$m > 0 \quad \text{such that} \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad f(x) > m$$

$$0 = \int_a^b f = \int_a^{x_0 - \delta} f + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f + \int_{x_0 + \delta}^b f$$

$$> 0 + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} m + 0$$

$$= 2sm > 0$$

which contradicts,

$\forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0$

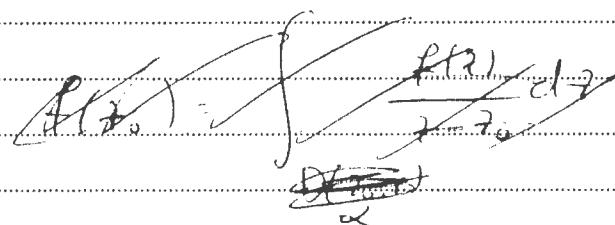
جامعة الملك عبد الله

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0 \quad ; \quad f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$$

$$x \in [a, b] \quad \text{وحيث } f(x) = 0 \quad \text{فـ}$$

اجابة المسؤل

~~أنا أفهم ما تقصده~~



نحو المدى $\Rightarrow \alpha < \beta$

~~مُسْتَقِل~~

$$0 < d < r \quad \text{وـ}$$

d يـ

بعد المدى $\Rightarrow \alpha > \beta$

$$f(z_0 + \frac{1}{r} e^{it}) \int_{\gamma_d}^{\gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z_0} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_d}^{2\pi} \frac{f(z_0 + de^{it})}{de^{it}} (de^{it}) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + de^{it}) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + de^{it}) dt$$

$$\begin{aligned}
 |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + de^{it}) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + de^{it})| dt \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt \\
 &= |f(z_0)|
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + de^{it})| dt = |f(z_0)|$$

والتي يكافئ

$$\begin{aligned}
 \cancel{\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + de^{it})|) dt = 0} \\
 \text{لما } \exists t \in (0, 2\pi) \text{ كـ } |f(z_0)| \geq |f(z_0 + de^{it})| \text{ بما أن } \\
 \text{نفس المقدمة جداً} \\
 t \in (0, 2\pi) \text{ لكن } |f(z_0)| = |f(z_0 + de^{it})| \\
 \cdot |z_0 - z| = d \text{ لكن } |f(z_0)| = |f(z)| \stackrel{def}{=} \\
 \text{بما أن الجميع كل } r \\
 \cdot z \in D(z_0, r) \text{ كـ } |f(z_0)| = |f(z)|
 \end{aligned}$$