
السؤال الأول : (8 درجات)

(1) ليكن G رسما مستويا لا يحتوي على مثلثات، عدد رؤوسه v ، حيث $v \geq 4$ ، و عدد أضلاعه m .

(أ) أثبت أنه إذا كان G مترابطا، فإن $m \leq 2v-4$. (3 درجات)

(ب) استنتج أن $m \leq 2v-4$. (درجة واحدة)

(ت) أثبت أن الرسم $K_{3,3}$ غير مستو . (درجة واحدة)

(2) جد قيم m,n بحيث يكون الرسم $K_{m,n}$ مستويا. (درجة واحدة)

(3) أعط مثالا لرسم H ، عدد رؤوسه 8، بحيث كل من الرسمين H و $\overline{H}$ غير مستو. (درجتان)

السؤال الثاني : (10 درجات)

(1) (3 درجات) أثبت أن عدد التطبيقات الشاملة من المجموعة $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ إلى المجموعة $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$، حيث $m \geq n$، يساوي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

(2) جد عدد التباديل f للمجموعة $\{1,2,3,\ldots,2n+1\}$، حيث $n \geq 2$ عدد صحيح، في كل من الحالات التالية:

(i) f تترك بالضبط n عددا في أماكنها الطبيعية. (درجة ونصف)

(ii) f تترك كل عدد زوجي في مكانه الطبيعي. (درجة ونصف)

(iii) $f(\{1,n\})=\{1,n\}$ و f تترك بالضبط n عددا في أماكنها الطبيعية. (درجتان)

(3) (أ) (درجتان) أعط برهانا تركيبيا للمتطابقة: $\binom{7n}{2}=\binom{4n}{2}+\binom{3n}{2}+12n^2$ ، حيث n عدد صحيح موجب.

السؤال الثالث : (7 درجات)

(1) (أ) (درجة واحدة) جد معامل $x^4y^3z^2w^4$ في مفكوك $(x+y+z+w)^{13}$.

(ب) (درجة واحدة) جد عدد حدود مفكوك $(x+y+z+w)^{13}$.

(2) (أ) (درجتان) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1+x_2+x_3=17$ إذا كان $x_3 \geq 7$ ، $x_2 > 3$ ، $x_1 \geq 4$

(ب) (3 درجات) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1+x_2+x_3=17$ إذا كان $0 \leq x_3 \leq 8$ ، $0 \leq x_2 \leq 9$ ، $0 \leq x_1 \leq 3$

نموذج لحل الاختبار الفصلي الثاني

على المقرر 431 ريض

الفصل الأول (37/38)

السؤال الأول / (1) أ) يمكن الإثبات بتعديل بسيط في برهان "نتيجة (4,2)" بالصفحة 88 من الكتاب.

ب) من الفقرة (أ) يمكن أن نفرض أن G غير مترابط.

لتكن $G_1, G_2, \dots, G_k$ مركبات G، حيث $k \geq 2$.

لكل $1 \leq i \leq k$، ليكن v_i رأساً من G_i. لنعتبر الرسم $\tilde{G}$ حيث:

$$V(\tilde{G}) = V(G), \quad E(\tilde{G}) = E(G) \cup \{\{v_i, v_{i+1}\} : 1 \leq i < k\},$$

واضح أن $\tilde{G}$ رسم مستوٍ، لا يحتوي على مثلثات، وأن $\tilde{G}$ مترابط. إذاً من (أ) نرى أن:

$e(\tilde{G}) \leq 2v - 4$. لكن $e(\tilde{G}) = m + (k-1)$

إذاً $m \leq m + (k-1) \leq 2v - 4$

ومنه $m \leq 2v - 4$.

ت) $K_{3,3}$ هو رسم بدون مثلثات. لنفرض بالتناقض أنه مستوٍ. فينتج من (ب) أن $e(K_{3,3}) \leq 2 \times 6 - 4$، ومنه $9 \leq 8$؛ تناقض. إذاً $K_{3,3}$ غير مستوٍ.

(2) من السهل أن نرى أن $K_{m,n}$ رسم مستوٍ إذا وفقط إذا كان:

$(\min(m,n) \le 2)$ ، إذ لو أن $\min(m,n) \ge 3$ فإن $K_{m,n}$ غير مستوٍ لأنه يحتوي رسماً جزئياً يماثل $K_{3,3}$.

(3) ليكن $H = K_5 \sqcup K_3$.

واضح أن H غير مستوٍ (يحتوي K_5 كرسم جزئي)

وأن $\overline{H}$ غير مستوٍ لأنه يحتوي رسماً جزئياً يماثل $K_{3,3}$).

N.B لاحظ أن: $\overline{H} = \overline{K_5} + \overline{K_3}$

السؤال الثاني (1) المطلوب إثباته هو مبرهنة (2,2,at) بالصفحة 43 من الكتاب.

(2) ليكن N هو العدد المطلوب. يمكن أن نرى أن:

(أ)
$$N = \binom{2n+1}{n} d_{n+1}$$

(ب) $N = (n+1)!$ لأن N يساوي عدد تباديل الأعداد الفردية $1, 3, 5, \ldots, 2n+1$.

(ث) بدراسة الحالتين: $\left(\begin{cases} f(1)=1 \\ f(n)=2n \end{cases}\right)$ و $\left(\begin{cases} f(1)=2n \\ f(n)=1 \end{cases}\right)$

نرى أن:

$$N = \binom{2n+1-2}{n-2} d_{n+1} + \binom{2n+1-2}{n} d_{n-1}$$

أي أن

$$\boxed{N = \binom{2n-1}{n-2} d_{n+1} + \binom{2n-1}{n} d_{n-1}}$$

(3) لنعتبر أن لدينا صندوقا يحتوي على $4n$ كرة بيضاء و $3n$ كرة سوداء.

ليكن N عدد طرق اختيار كرتين من الصندوق.

(أ) $N=\binom{7n}{2}$.

وباعتبار الحالتين: "الكرتان من نفس اللون" و "الكرتان ليس لهما نفس اللون" نجد أن:

$$N=\binom{4n}{2}+\binom{n}{2}+\binom{4n}{1}\binom{3n}{1}$$

إذن

$$\binom{7n}{2}=\binom{4n}{2}+\binom{3n}{2}+12n^2$$

السؤال الثالث (1) (أ) المعامل هو:

$$N=\binom{13}{2,3,4,4}=\frac{(13)!}{2!\ 3!\ 4!\ 4!}$$

(ب) عدد حلول المذكور هو:

$$N=\binom{4-1+13}{13}=\binom{16}{13}$$

(2) (أ) واضح أن العدد المطلوب N هو عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة: $Y_1+Y_2+Y_3=2$

(أي ذلك بالتعويض: $(Y_1=x_1-4,\ Y_2=x_2-4,\ Y_3=x_3-7$

إذن:

$$N=\binom{3-1+2}{2}=\binom{4}{2}=6$$

(Page 3)

ب) لتكن U هي مجموعة الحلول الصحيحة (x_1, x_2, x_3) غير السالبة للمعادلة $x_1+x_2+x_3=17$ ، ولنعتبر المجموعات الجزئية التالية من U :

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : x_1 \geq 4, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0\},$$

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 10, \ x_3 \geq 0\},$$

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_2 \geq 9\}.$$

- واضح أن العدد N المطلوب هو :

$$N = |U \setminus (A \cup B \cup C)|$$

من مبدأ التضمين والإقصاء لدينا :

$$N = |U| - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) - |A\cap B\cap C|.$$

- نجد بسهولة القيم التالية :

$$* \ |U| = \binom{3-1+17}{17} = \binom{19}{17} = 171$$

$$* \ |A| = \binom{3-1+17-4}{17-4} = \binom{15}{13} = 105$$

$$|B| = \binom{3-1+17-10}{17-10} = \binom{9}{7} = 36$$

$$|C| = \binom{3-1+17-9}{17-9} = \binom{10}{8} = 45, \ |A\cap B| = \binom{5}{3} = 10,$$

$$|A\cap C| = \binom{6}{4} = 15, \ |B\cap C| = 0, \ |A\cap B\cap C| = 0.$$

إذا :

$$N = \binom{19}{17} - \left[\binom{15}{13} + \binom{9}{7} + \binom{10}{8}\right] + \left[\binom{5}{3} + \binom{6}{4}\right] \Rightarrow \boxed{N = 10}$$