

ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا هي رسوم بسيطة.

أجب عن كل من الأسئلة التالية:

السؤال 1:

(١) (درجتان) إذا كان $G = (X, Y, E)$ رسمًا ثانوي التجزئة، فأثبت أن:

$$|E| = \sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{y \in Y} \deg(y)$$

(٢) لتكن المتالية $D = (3, 3, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7)$

(i) (درجتان) بين فيما إذا كانت المتالية D رسمية.

(ii) (درجتان) أثبت أنه لا يوجد رسم ثانوي التجزئة بحيث تكون المتالية D متالية درجات له.

السؤال 2:

(١) (درجتان) أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها n يكون عدد أضلاعها $n - 1$.

(٢) (درجتان) إذا كان G رسمًا عدد رؤوسه n و عدد أضلاعه e و عدد مركباته k ، فأثبت أن $e \geq n-k$.

(٣) (درجة ونصف) أوجد قيم n, m بحيث يكون الرسم $K_{n,m}$ أويلريا.

(٤) (درجة ونصف) أوجد قيم n بحيث يكون متم الرسم C_n أويلريا.

(٥) (درجة ونصف) أعط مثالاً لرسم غير هاميلتوني عدد رؤوسه ٧ و عدد أضلاعه ١٦.

السؤال 3:

(١) (درجة ونصف) هل يوجد رسم مستو، عدد رؤوسه ٩٠ و عدد أضلاعه ٩٦ و عدد أوجهه ٧؟ (علل الإجابة).

(٢) (٣ درجات) إذا كان G رسمًا مستوياً متربطاً عدد رؤوسه v و عدد أضلاعه e و طول أقصر دورة فيه يساوي k ، فأثبت أن $e \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$.

(٣) ليكن G رسمًا عدد رؤوسه ١٢ و عدد أضلاعه ١٤ بحيث درجة كل من رؤوسه تساوي ٢ أو ٣.

(i) (درجة ونصف) أوجد متالية درجات الرسم G .

(ii) (درجة ونصف) أعط مثالاً للرسم G .

السؤال 4 :

أ) (3 درجات) إذا كان k , n عددين صحيحين موجبين ، فأثبت أن:

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$$

ب) (3 درجات) جد عدد الأعداد الصحيحة x بحيث :

$1 \leq x \leq 400$ ، x لا يقسم 6 ، x لا يقسم 5 ، x لا يقسم 3 .

ج) ليكن n عدداً صحيحاً بحيث $n \geq 6$.

جد عدد التباديل f للمجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ في كل من الحالتين التاليتين:

i) (درجة ونصف) f تترك كل عدد زوجي في موضعه الطبيعي و تجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي .

ii) (درجة ونصف) $f(1) = 2$ و $f(2) = 1$ و f تترك بالضبط ثلاثة أعداد في أماكنها الطبيعية .

السؤال 5 :

أ) (درجتان) جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ بحيث:

$$x_1 \geq 3 , \quad x_2 \geq -2 , \quad x_3 > 6 , \quad x_4 > 7$$

ب) (درجتان) أو جد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$$

حيث x_1, x_2, x_3 أعداد فردية و x_4, x_5 عددان زوجيان.

ج) (درجتان) أعط برهاناً تركيبياً للتطابقة: $\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + nm$ حيث $n \geq 2$ و $m \geq 2$ عددان صحيحان .

د) (3 درجات) إذا كانت $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ متتالية من الأعداد الحقيقة المختلفة، فأثبت أنه إما توجد متتالية جزئية متزايدة طولها $n+1$ أو توجد متتالية جزئية متناقصة طولها $m+1$.

السؤال ٥

أ) كرده على λ يساهم بالجهاز $\{x\}$ بـ $\deg(x)$ و كذلك يساعده بالجهة $\{y\}$

$\deg(x) \leq \deg(y)$

$$|G| = \sum_{x \in G} \deg(x) = \sum_{y \in G} \deg(y)$$

$$|G| = (7, 6, 6, 6, 6, 6, 3, 3, 3, 3, 3) \quad (1)$$

نجد أن λ يساعده بالجهة $\{x\}$ بـ $\deg(x)$

$$\lambda' = (5, 5, 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 3) - \delta_1$$

$$\lambda'_2 = (5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3) - \delta_2$$

$$\lambda'_3 = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3) - \delta_3$$

$$\lambda'_4 = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2) - \delta_4$$

$$\lambda'_5 = (3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2) - \delta_5$$

$$\lambda'_6 = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1) - \delta_6$$

$$\lambda'_7 = (2, 2, 1, 1, 1, 1) - \delta_7$$

$$\lambda'_8 = (1, 1, 1, 1, 1) - \delta_8$$

$$\lambda'_9 = (1, 0, 0, 0) - \delta_9$$

$$\lambda'_{10} = (-1, 0, 0, 0) - \delta_{10}$$

$$\lambda'_{11} = (0, 0, 0, 0, 0) - \delta_{11}$$

نجد أن λ'_{11} يحقق الشرط $\lambda'_{11} \geq \lambda'_{10} \geq \dots \geq \lambda'_{1}$ ١٠

وأي λ' يحقق الشرط $\lambda'_{11} \geq \lambda'_{10} \geq \dots \geq \lambda'_{1}$

$$(7, 6, 6, 6, 6, 6, 3, 3, 3, 3, 3)$$

$\deg(\lambda') = 7$ يحقق الشرط $\lambda' \geq \lambda$

$$\deg(\lambda') = 7$$

$$\deg(\lambda) = 6 \rightarrow 3$$

$$\deg(\lambda) = 6 \rightarrow 3$$

$$7 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\sum_{x \in X} f(x) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{y \in Y} f(y) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{y \in Y} f(y)$$

لذلك يمكننا كون كوكيل على البحرية

(6)

(ا) ماتصال الماء، ارسال من دبى، ابروزر ادا
المياه في المرة k وستكون ماء ابروزر صحيحة في المرة $k+1$
المرص على الماء الماء في المرة $k+1$ ليس صحيح، ثم دعوه صحيحة
صحيح لهم على الماء الماء في المرة $k+1$ ليس صحيح، ثم دعوه صحيحة
 $\Rightarrow k+1 = 1$ صحيح، ثم دعوه صحيحة، ثم دعوه صحيحة
دعاهم على الماء الماء في المرة $k+1$ ليس صحيح، ثم دعوه صحيحة
دعاهم على الماء الماء في المرة $k+1$ ليس صحيح، ثم دعوه صحيحة

فقط (ا)

$$G(V_1, G(V_2), G(V_3)) \in \text{نحو اولي، ان} \quad \text{نحو}$$

وهو $G(V_1, G(V_2), G(V_3)) \in \text{نحو اولي، ان} \quad \text{نحو}$

$$e \geq \sum_{i=1}^k e_i$$

$$e \geq \left(\sum_{i=1}^k (v_{i-1}) - \sum_{i=1}^k v_i - \sum_{i=1}^k 1 \right)$$

لذلك $e \geq v - k$

لا يكتب في
هذا المقام

km,n (2)

نقطة km,n هي نقطة مترادفة لـ km,n
نقطة km,n هي نقطة مترادفة لـ km,n

km,n = kuy

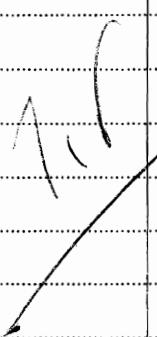
|x|=m

|y|=n

xny=φ

N(x) = y & x Gy

M(y) = x & y Gy



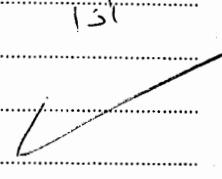
131

HxGx

HyGy

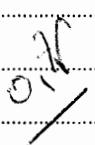
hxg=m

hey=n

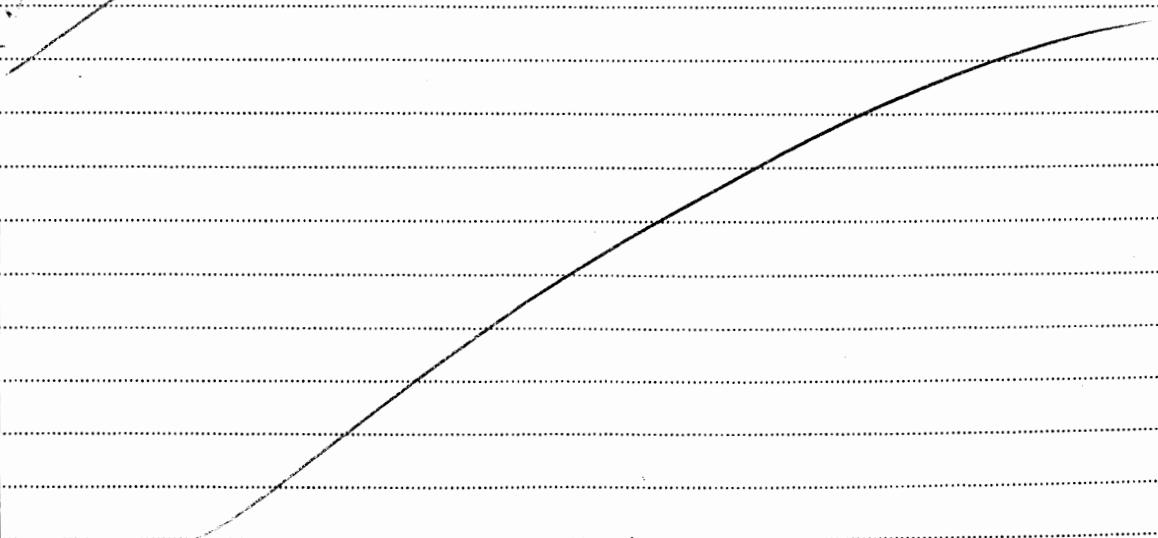


131

نقطة km,n هي نقطة مترادفة لـ km,n



(2)



(2)

(السؤال 3) 4,5

$$v=90, e=76, g=2 \quad \text{معنون بالـ (V)}$$

لـ 1

$$G \subset \mathbb{Q}, K \supseteq \mathbb{Z} \quad v - e + g = k + 1$$

$$90 - 76 + 2 = k + 1$$

$$1 = k + 1$$

$$k = 0$$

و حـ 1 لـ 1 مـ 1 كـ 1

مـ 1 كـ 1 مـ 1 لـ 1 حـ 1

لـ 2

$$\Rightarrow h = (x, y, z) \quad \text{نـ 1 كـ 1 مـ 1 لـ 1}$$

$$G \in M(1, \mathbb{Z}) \quad X_2(K_1, \dots, x_n)$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad Y = (y_1, \dots, y_m)$$

(G مـ 1 كـ 1 مـ 1 لـ 1)

لـ 1 كـ 1 مـ 1 لـ 1 حـ 1 مـ 1 كـ 1 مـ 1 لـ 1 حـ 1 مـ 1 كـ 1

لـ 1

$$1 \leq v \leq c$$

$$\sum_{i=1}^n b_i k \leq c$$

$$1 \leq v \leq c$$

$$\sum_{i=1}^n b_i y_i \geq c$$

لـ 1 كـ 1 مـ 1 لـ 1 حـ 1 مـ 1 كـ 1 مـ 1 لـ 1 حـ 1 مـ 1 كـ 1

$$|\beta'| \geq \sum_{i=1}^n b_i k = \sum_{i=1}^m y_i$$

لـ 1 كـ 1 مـ 1 لـ 1 حـ 1 مـ 1 كـ 1 مـ 1 لـ 1 حـ 1 مـ 1 كـ 1

$$|\beta'| \geq \sum_{i=1}^n b_i = 2e$$

$$|\beta'| \geq n = k \neq$$

$$K\varrho \leq |\zeta'| \leq 2\varrho$$

لذلك

$$K\varrho \leq 2\varrho$$

من معاشر

$$r = e + \varrho = 2$$

نقطة كثافة

$$Kr - K\varrho + K\varrho = 2K$$

$$2K = Kr - K\varrho + K\varrho$$

$$2K \leq Kr - K\varrho + K\varrho$$

$$Kr - 2\varrho \leq Kr - 2K$$

$$(K-2)\varrho \leq (r-2)K$$

$$\varrho \leq \frac{K}{K-2} (r-2)$$

الخطوة ٣
الخوارزمية

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + k S(n, k)$$

$$N \rightarrow N' = \{1, \dots, n+1\} \rightarrow N = \{1, \dots, n\}$$

أكمل الجدول كالتالي

$$1 - \text{جذر } N \rightarrow N' = \{1, \dots, n+1\} \rightarrow N = \{1, \dots, n\}$$

نحو ذلك تتم التحويلات

٢ - جذر $\rightarrow N \rightarrow N'$ ونحو ذلك تتم التحويلات

ومن صيغة حساب $K S(n, k)$

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + k S(n, k)$$

الخطوة ٤

أحد 

$$A_1 = \{x \in U : 3|x\} \text{ و } U = \{1, \dots, 400\}$$

$$A_2 = \{x \in U : 5|x\}$$

$$A_3 = \{x \in U : 6|x\}$$

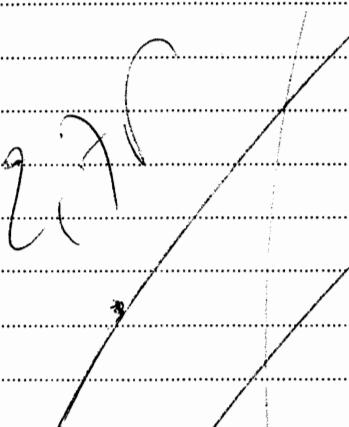
الآن نحسب

$$|U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$$

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{400}{3} \right\rfloor = 133$$

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor = 80$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{400}{6} \right\rfloor = 66$$



$$|\Delta_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{400}{15} \right\rfloor = 26$$

$$|\Delta_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{400}{18} \right\rfloor = 22$$

$$|\Delta_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{400}{30} \right\rfloor = 13$$

$$|\Delta_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{400}{90} \right\rfloor = 4$$

الآن نحسب

$$|U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |U| - r_1 - r_2 - r_3$$

$$= (400) - (133) + (80) - (66) =$$

(ج) (ا)

لـ $N = 8$ و $\lambda = 1$ المتر

و $\theta = 30^\circ$

$$N = 8$$

$$n = 2q$$

$$p = q + \frac{1}{2}$$

$$n = 2q + 1$$

$$p = q + n$$

$$\frac{n}{2} = q + \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{n}{2} \right] = q + 1 \geq p$$

الخط

$$(c) N = (3 \ 1 \ 8 \ -3 \ \boxed{a \geq 6})$$

الخط
8171

$$x_3 = 7 \quad c_{15} \quad x_3 = 7 \quad \text{نحو } 7$$

$$x_4 = 8 \quad c_{15} \quad x_4 = 8 \quad \text{نحو } 8$$

$$y_1 = x_1 - 3.0 \quad \Leftarrow x_1 = 3$$

$$y_2 = x_2 + 2.0 \quad \Leftarrow x_2 = -2$$

$$y_3 = x_3 - 7.0 \quad \Leftarrow x_3 = 7$$

$$y_4 = x_4 - 8.0 \quad \Leftarrow x_4 = 8$$

نحو $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ \Leftarrow

$$(y_1 + 3) + (y_2 - 2) + (y_3 + 7) + (y_4 + 8) = 19$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 16 = 19$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 19 - 16 = 3$$

الإجابة المطلوبة

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 3$$

139

$$N = \binom{4-1+3}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!3!} =$$

(a)

$$X_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$X_2 \in \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$X_3 \in \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$X_4 \in \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$X_5 \in \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

الإجابة المطلوبة

$$f(x) = (x + x^3 + x^5 + \dots)^3 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^2$$

$$f(x) = (x(1 + x^2 + x^4 + \dots))^3 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^2$$

$$f(x) = x^3 (1 + x^2 + x^4 + \dots)^3 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^2$$

$$f(x) = x^3 (x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^5$$

$$\begin{aligned}y &= x^3 \\y^2 &= x^6 \\y^3 &= x^9 \\y^4 &= x^{12}\end{aligned}$$

الإجابة

$$y = x$$

$$y^2 = x^4$$

$$y^3 = x^9$$

$$y^4 = x^{12}$$

c 1.5

$$= x^3 (1 + y + y^2 + y^3 + \dots)^5$$

$$= x^3 (1 - y)^{-5}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^5}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x^2)^5}$$

$$\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + nm \quad (2)$$

(٤)

لأن $n+m > 2$

$\binom{n}{2}, \binom{m}{2}, nm > 0$

ولذلك N هو مركب اخر، ليس من الممكن

الطبقة الأولى

الطبقة الثانية $N = \binom{n+m}{2}$ ١

الطبقة الثالثة $\binom{n}{2}$ مكونة من المكونات $\binom{n}{2}, \binom{m}{2}$

$\binom{m}{2}$ مكونة من المكونات $\binom{m}{2}, \binom{n}{2}$

لذلك N هي مكونة من المكونات $\binom{n}{2}, \binom{m}{2}, \binom{n}{2}, \binom{m}{2}$

صحيح

$$N = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + \binom{m}{2}$$

$$N = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + nm$$

لذلك N هو مركب

(>)

لهم

وَمَنْ يُحْكِمْ حَدْدَتِهِ فَلَا يُؤْخَذُ عَلَيْهِ وَمَنْ يُؤْخَذُ عَلَيْهِ

وَمَنْ يَعْلَمُ أَعْلَمُ بِأَعْلَمٍ إِنَّمَا تَعْلَمُ الْجِنَّاتُ

بِمَا يَرَوْنَ لَا يُؤْخَذُ عَلَيْهِ مَا لَمْ يَرَوْنَ كَمَا لَا يُؤْخَذُ عَلَيْهِ مَا لَمْ يَرَوْنَ

صَدَقَ بِمَا يَرَى وَالْحَامِدُ بِمَا لَمْ يَرَى وَالْمُنْكَرُ بِمَا لَمْ يَرَى

$$\underbrace{m+1}_{n} = m+1$$

إذا أتيت به \overline{m} فالمنتهيات مع \overline{m} ستساوى $m+1$ مقدار
فهي متساوية $m+1$ لأن كل المنهيات متساوية

فهي متساوية $m+1$ لأن $m+1$ هي المنهيات

\rightarrow ⁶⁾ $\overline{m+1}$ صدقة في صورها جزء من المنهيات

$m+1$

إذا $m+1$ و $m+1$ متساوية

فهي متساوية $m+1$