جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول
العام الدراسي 1433\32
الإختبار النهائى

الزمن: 3 ساعات
مقرر: 423 ريض

أجب عن **أربعة** أسئلة فقط من الأسئلة الآتية:

السؤال الأول:

أ) بين أن المعادلة التفاضلية الناشئة من حذف الثوابت a,b,c من المعادلة $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$ هى نفس المعادلة التفاضلية الناشئة من حذف الثوابت f,g من المعادلة $z = g\dfrac{x^4}{y^2} + f\dfrac{y^4}{x^2}$

ب) بين أن المعادلة التفاضلية $(3x^2y^2 - ze^x)dx + (2x^3y + \sin z)dy + (y\cos z - e^x)dz = 0$ قابلة للتكامل ثم أوجد حلها

ج) أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

....

السؤال الثاني:

أ) أوجد كلا من الدالة المتممة والحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} - 6\frac{\partial^3\psi}{\partial y^2\partial x} - 8\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = (x^2 + 6y) + \sin(4x + y) + \exp(x - y)$$

ب) برهن على أن الدالة $\phi(x,t)$ والتي تحقق المعادلة الحرارية $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ طبقا للشروط الحدية :

1- $\dfrac{\partial}{\partial x}\phi(x,t) = 0, x = 0, a$ لجميع قيم t . 2- الدالة $\phi(x,t)$ محدودة لجميع قيم x داخل الفترة المغلقة $[-a,a]$ عندما $t \to \infty$. 3- الدالة $\phi(x,t=0) = |x|$ لجميع قيم x داخل الفترة المغلقة $[-a,a]$ يمكن كتابتها على الصورة :

$$\phi(x,t) = \frac{a}{2} - 4\frac{a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{a}x\right)\exp\left[-\frac{1}{a^2}(2n+1)^2\pi^2 kt\right]$$

....

السؤال الثالث :

ا) إذا كانت درجة الحرارة على سطح كرة مصمتة متجانسة نصف قطرها الوحدة تكون على الصورة : $\psi(r,\varphi) = \begin{vmatrix} T_0 & 0 < \varphi < \alpha \\ 0 & \alpha < \varphi < \pi \end{vmatrix}$ بين أن درجة الحرارة الموزعة بانتظام خلال الكرة يمكن وصفها بالمعادلة : $\psi(r,\phi) = \dfrac{T_0}{2}\left[(1 - \cos\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(P_{n+1}(\cos\alpha) - P_{n-1}(\cos\alpha)\right)\right]P_n(\cos\varphi)$ حيث $P_n(x)$ هى كثيرة حدود لاجندر .

ب) كون المعادلة التفاضلية والتى يكون حلها على الصورة : $\eta\left(xyz, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$

السؤال الرابع:

أ) إذا كانت معادلة لابلاس في الإحداثيات الكرتيزية (x,y,z) تكتب على الصورة

$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=0$ فبرهن على أن حلها في الإحداثيات الأسطوانية (r,θ,z) عن طريق فصل المتغيرات يكون على الصورة

$\phi(r,\theta,z)=(A\cos n\theta+B\sin n\theta)(DJ_n(mr)+EJ_{-n}(mr))\exp(\pm mz)$ حيث m ثابت &
n أى عدد بينما J هى دالة بسل .

ب) إذا كانت $\psi(r,\theta)$ هي دالة الجهد لسائل غير لزج ينساب بانتظام حول أسطوانة نصف قطرها a وتحقق الشروط الحدية الآتية : $\frac{\partial}{\partial r}\psi(a,\theta)=0$ & $\psi(r,\theta)=\psi(r,-\theta)$ هذا بالإضافة إلى أن $\lim_{r\to\infty}\left(\psi(r,\theta)-\psi_0 r\cos\theta\right)=0$ حيث ψ_0 ثابت. فبرهن على أن تلك دالة يمكن كتبتها على الصورة $\psi(r,\theta)=\psi_0\left(\frac{a^2}{r}+r\right)\cos\theta$. فإذا علم أن $\eta(r,\theta)$ هى دالة السرعة لذلك التيار فأثبت أن

$$\eta(r,\theta)=\psi_0\left(\frac{a^2}{r}-r\right)\sin\theta$$

....

السؤال الخامس :

بين أن حل المعادلة الموجية $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=g$ والتى تحقق الشروط الحدية الآتية :

$$\frac{\partial\psi(x,0)}{\partial t}=0 \qquad 0\le x\le b, \qquad \psi(0,t)=0, \quad \psi(b,t)=0, \qquad t\ge 0$$

$$\psi(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2hx}{b} & 0\le x\le \dfrac{b}{2}\\[2mm] \dfrac{2h(b-x)}{b} & \dfrac{b}{2}\le x\le b\end{cases}$$

يمكن كتابته على الصورة :

$$\psi(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)\pi}{(2n-1)^2}\sin\left((2n-1)\frac{\pi x}{b}\right)\cos\left((2n-1)\frac{\pi ct}{b}\right)-\frac{4b^2g}{\pi^3c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^3}\sin\left((2n-1)\frac{\pi x}{b}\right)$$

$$\times\sin^2\left((2n-1)\frac{\pi ct}{2b}\right)$$

....