قسم الرياضيات | 423 ريض | الفصل الأول

جامعة الملك سعود | الاختبار النهائي | 2010-2009

أجب على ستة من الأسئلة التالية:

1- استخدم تحليل المؤثر للحصول على الحل العام للمعادلة $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=e^{2x}$، ثم أوجد الحل الذي يحقق الشرطين: $u(x,0)=x,\quad u_y(x,0)=-\frac{1}{2}e^{2x}$ 9

2- أوجد حل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ داخل الدائرة $0\le r<10$، $0\le\theta<2\pi$، تحت كل من الشرطين الحدية (كلّ على حدة): 9

$$(i)\ \ u(10,\theta)=\sin 3\theta,\qquad (ii)\ \ u_r(10,\theta)=\sin 3\theta.$$

3- أوجد الحل 9

$$\begin{aligned}&u_{tt}=c^2u_{xx},\quad 0<x<\pi,\ t>0,\\&u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t>0,\\&u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=1,\quad t>0.\end{aligned}$$

4- أوجد الحل 9

$$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx}+1,\quad 0<x<\pi,\ t>0,\\&u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t>0,\\&u(x,0)=-x^2/2,\ u_t(x,0)=0,\quad 0<x<\pi.\end{aligned}$$

5- أوجد توزيع درجة الحرارة على قضيب طوله 3، مثبّت طرفه الأيسر عند الدرجة -2، وطرفه الأيمن عند الدرجة 1، علماً بأن معادلة انتقال الحرارة $u_t=9u_{xx}$، والتوزيع الابتدائي لدرجة الحرارة معطى بالدالة $u(x,0)=x$. 9

6- استخدم تكامل فورييه لحل المسألة 9

$$\begin{aligned}&u_t=u_{xx},\quad x>0,\ t>0,\\&u(0,t)=0,\quad t>0,\\&u(x,0)=e^{-x},\quad x>0.\end{aligned}$$

إرشاد: استخدم الصيغة التكاملية $\int_0^\infty e^{-x}\sin\lambda x\,dx=\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$

7- أثبت وحدانية الحل لمعادلة الحرارة $u_t=k^2u_{xx}+f(x,y)$ على الشريحة $(0,l)\times(0,\infty)$ تحت الشروط الحدية $u(0,t)=T_0$، $u(l,t)=T_1$ والشرط الابتدائي $u(x,0)=g(x)$، على افتراض أن $u(x,t)$ متصلة على $[0,l]\times[0,\infty)$. 9

لا يكتب في

هذا الهامش

[illegible]

$$u(r,\theta) = a_0 + d_0 \ln r + \sum_{1}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{-n})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

[illegible] $r = 0$ [illegible]

2 $$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$ ✓

$$u(10,\theta) = \sin 3\theta$$ ~~$u(10,\theta)$~~

$$u(10,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 10^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$ ✓

~~[illegible]~~

$$u(10,\theta) = a_0 + 10 a_1 \cos\theta + 10 b_1 \sin\theta + 100 a_2 \cos 2\theta + 100 b_2 \sin 2\theta$$
$$+ 1000 a_3 \cos 3\theta + 1000 b_3 \sin 3\theta + \dots = \sin 3\theta$$

[illegible]

$a_n = 0 \quad \forall n$ ✓

$1000 b_3 = 1 \Rightarrow b_3 = 0.001 = \frac{1}{1000}$ ✓

$b_n = 0 \quad \forall n \neq 3$

بالتالي

2 ~~$u(r,\theta)$~~ $$u(r,\theta) = r^3 \left(\frac{1}{1000} \sin 3\theta\right) = \frac{r^3}{1000} \sin 3\theta$$ ✓

الحل وحيد (مسألة دريشليه)

$$u_r(10,\theta) = \sin 3\theta \qquad (ii)$$

$$u_r(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$u_r(10,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n(10)^{n-1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta$$
$$+ a_2\, 20 \cos 2\theta + b_2\, 20 \sin 2\theta + 300 a_3 \cos 3\theta + 300 b_3 \sin 3\theta + \dots$$
$$= \sin 3\theta$$

5

$\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$, [illegible]

لا يكتب في
هذا الهامش

السؤال السابع

معادلة موجية

$u(x,t) = V(x)\,W(t)$

$V(x) = A_1 \cos\lambda x + B_1 \sin\lambda x$

$W(t) = A_2 \cos c\lambda t + B_2 \sin c\lambda t$

$u(0,t) = 0 \Rightarrow V(0)W(t) = 0 \Rightarrow V(0) = 0$

$\Rightarrow V(0) = A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow \boxed{V(x) = B_1 \sin\lambda x}$

$u(\pi,t) = 0 \Rightarrow V(\pi)W(t) = 0 \Rightarrow V(\pi) = 0 \Rightarrow V(\pi) = B_1 \sin\pi\lambda =$

$B_1 = 0 \Rightarrow$ الحل التافه

$B_1 \neq 0 \Rightarrow \sin\pi\lambda = 0 \quad \lambda\pi = \pi n \Rightarrow \lambda_n = n \quad n = 0, 1, \ldots$

$\boxed{V_n(x) = \sin nx}$

$u(x,0) = 0 \Rightarrow V(x)W(0) = 0 \Rightarrow W(0) = 0$

$W(0) = A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 0 \Rightarrow \boxed{W(t) = B_2 \sin c\lambda t}$

$\boxed{W_n(t) = \sin cnt}$

$u_n(x,t) = \sin nx \sin cnt$

$u(x,t) = \sum b_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nx \sin cnt$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \sin cnt}$$

$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} cn\, b_n \sin nx \cos cnt$

$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} cn\, b_n \sin nx = 1$

$cn\,b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\Big[-\cos nx\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}\Big[1-(-1)^n\Big]$

0 زوجي

تابع السؤال الثالث

$$u(x,t) = \frac{4}{c\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x\,\sin(c(2n+1))t$$

السؤال الرابع

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$$

$$v_{tt} = v_{xx} \qquad v(x,t) = M(x)W(t) \quad \begin{cases} M(x) = A_1\cos\lambda x + B_1 \sin\lambda x \\ W(t) = A_2\cos\lambda t + B_2\sin\lambda t \end{cases}$$ الحل المتجانس

$$\psi''(x) = 1 \Rightarrow \psi(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$$ الحل الخاص

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow \psi(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$u(\pi,t) = 0 \Rightarrow \psi(\pi) = \frac{1}{2}\pi^2 + b\pi = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}\pi$$

$$\boxed{\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\pi x}$$

$$v(x,t) = u(x,t) - \psi(x,t) \Rightarrow v(x,0) = u(x,0) - \psi(x)$$

$$v(x,0) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\pi x = -x^2 + \frac{1}{2}\pi x$$

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow v(0,t) = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow \boxed{M(x) = B_1\sin\lambda x}$$

$$u(\pi,t) = 0 \Rightarrow v(\pi,t) = 0 \Rightarrow M(\pi) = 0 \Rightarrow B_1\sin\lambda\pi = 0$$

$B_1 = 0 \Rightarrow$ الحل التافه

$B_1 \neq 0 \Rightarrow \sin\lambda\pi = 0 \Rightarrow \lambda\pi = n\pi$ اذا

$\Rightarrow \lambda = n \quad n = 0, 1, \ldots$

$$\Rightarrow \boxed{M_n(x) = \sin nx}$$

$$u_t(x,t) = v_t(x,t) = M(x)W'(t)$$

$$W'(t) = \lambda(B_2\cos\lambda t - A_2\sin\lambda t)$$

$$u_t(x,0) = v_t(x,0) = M(x)W'(0) = 0 \Rightarrow W'(0) = 0$$

$$W'(0) = \lambda B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = 0 \Rightarrow \boxed{W(t) = A_2\cos\lambda t}$$

$$W_n(t) = \cos nt$$

$$v_n(x,t) = \sin nx\cos nt, \quad v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n(x,t)$$

لا يكتب في
هذا الهامش

تابع السؤال الرابع

$$u(x,0) = -x^2 + \frac{1}{2}\pi x$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = -x^2 + \frac{1}{2}\pi x$$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin nx)\left(-x^2 + \frac{1}{2}\pi x\right) dx$$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} -x^2 \sin nx \, dx}_{②} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi x \sin nx \, dx}_{①}$$

① $$\int_0^{\pi} x \sin nx = \left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int \cos nx\, dx \quad \begin{cases} u = x & dv = \sin nx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} x \sin nx = -\frac{\pi}{n}(-1)^n + \cancel{\frac{1}{n^2}\left[\sin nx\right]_0^{\pi}} = \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} = \frac{-\pi}{n}(-1)^n$$

② $$\frac{-2}{\pi}\int x^2 \sin nx\, dx = \frac{2}{n\pi}\left[x^2 \cos n\pi\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int x \cos nx\, dx \quad \begin{cases} u = x^2 & dv = \sin nx \\ du = 2x & v = -\frac{1}{n}\cos \end{cases}$$

$$= \frac{2\pi}{n}(-1)^n - \cancel{\frac{4}{n^2\pi}\left[x \sin nx\right]_0^{\pi}} + \frac{4}{n^2\pi}\int \sin nx\, dx \quad \begin{cases} u = x & dv = \cos nx \\ du = dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{cases}$$

$$= \frac{2\pi}{n}(-1)^n - \frac{4}{n^3\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi(-1)^n}{n} - \frac{4}{n^3\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \frac{2\pi(-1)^n}{n} + \frac{4}{n^3\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$① + ② = -\frac{\pi}{n}(-1)^n + 2\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{n^3\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$= \frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{n^3\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{\pi}{n} & \text{زوجي} \\ 8 \quad \pi \end{cases}$$

يكتب في
ذا الهامش

تابع السؤال الرابع

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{(2n+1)^3\pi} - \frac{\pi}{(2n+1)}\right) \sin(2n+1)x \cos(2n+1)t$$

$$+ \frac{2n}{\pi} \sin 2nx \cos 2nt$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{(2n+1)^3\pi} - \frac{\pi}{(2n+1)}\right) \sin(2n+1)x \cos(2n+1)t + \frac{(2n)}{\pi} \sin 2nx \cos 2nt + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$\boxed{\text{السؤال الخامس}}$

$u_t = 9u_{xx}$ $\quad 0 < x < 3$

$u(0,t) = -2, \quad u(3,t) = 1$

$u(x,0) = x$

$$\begin{cases} M(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \\ w(t) = e^{-9\lambda^2 t} \\ \psi(x) = Ax + b \end{cases}$$

$u(x,t) = V(x,t) + \psi(x)$

$V(x,t) = M(x)w(t)$

$\psi(0) = b = -2 \Rightarrow \boxed{b = -2}$ $\quad \psi(3) = A(3) - 2 = 1 \Rightarrow A = 1$

$\Rightarrow \boxed{\psi(x) = x - 2}$

وبالتالي نحصل على الحل المتجانس

$V(0,t) = u(3,t) = 0$

$V(x,0) = u(x,0) - \psi(x) = x - x + 2 = 2 \Rightarrow V(x,0) = 2$

$V(0,t) = 0 \Rightarrow M(0)W(t) = 0 \Rightarrow M(0) = A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \boxed{M(x) = B\sin\lambda x}$

$V(3,t) = 0 \Rightarrow M(3) = 0 \Rightarrow B\sin 3\lambda = 0, \; B = 0 \Rightarrow$ الحل التافه

$B \neq 0 \Rightarrow \sin 3\lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{3}}$ اذا $n = 0, 1, \dots$

$\boxed{M_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{3}x}$

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{3}x \, e^{-n^2\pi^2 t} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{3}x \, e^{-n^2\pi^2 t}} = V(x,t)$$

$$V(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{3}x = 1 \Rightarrow B_n = \frac{2}{3}\int_0^3 \sin\frac{n\pi}{3}x \, dx$$

$$B_n = \frac{2}{3}\left[\frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}x\right]_0^3 = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

لا يكتب
هذا الهـا

تابع السؤال الخامس

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)}{3}\pi x\; e^{-(2n+1)^2\pi^2 t}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)}{3}\pi x\; e^{-(2n+1)^2\pi^2 t}-(x-2)$$

$\cancel{u_t = u_{xx}}$

~~بما ان القطيب غير محدود عند احد الاطراف فان λ متغير على الفترة (0,∞) وبالتالي فان~~

$\cancel{u(x,t,\lambda)=}$

$\cancel{V(x)=A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x}$

$\cancel{u(0,t)=0 \Rightarrow V(0)=0 \Rightarrow V(0)=A(\lambda)=0 \Rightarrow A(\lambda)=0}$

$\cancel{V(x)=B(\lambda)\sin\lambda x}$

السؤال السادس

$u_t = u_{xx}$

بما ان القطيب غير محدود عند احد الاطراف فان λ متغير على الفترة (0,∞) وبالتالي فان

$$u(x,t,\lambda)=(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x)\,e^{-\lambda^2 t}$$

$$u(0,t,\lambda)=0 \Rightarrow A(\lambda)e^{-\lambda^2 t}=0 \Rightarrow A(\lambda)=0$$

$$\Rightarrow u(x,t,\lambda)=B(\lambda)\sin\lambda x\; e^{-\lambda^2 t}$$

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x\; e^{-\lambda^2 t}\,d\lambda$$

$$\int_0^{\infty}B(\lambda)\ldots \quad e^{-x}$$

لا يكتب في
هذا الهامش

تابع السؤال السادس

$$B(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x} \sin \lambda x \; dx = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)}$$

وبالتالي

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)} \sin \lambda x \; e^{-\lambda^2 t} \; d\lambda$$

6

لا يكتب في
هذا الهامش

السؤال السابع

$U(x,t) = V(x,t) + \psi(x) \Rightarrow V(x,t) = U(x,t) - \psi(x)$

لنفرض ان V الفرق بين حلين للمسألة

وبالتالي تحقق

$V_t = k^2 V_{xx}$

$V(0,t) = V(l,t) = 0 \qquad t > 0$

$V(x,0) = 0 \qquad 0 < x < l$

ليكن

$$E(t) = \frac{1}{2k^2}\int_0^l V^2(x,t)\,dx \geq 0 \qquad (**)$$

$$E'(t) = \frac{1}{k^2}\int_0^l V V_t\,dx = \int_0^l V V_{xx}\,dx$$

$u = V \qquad dv = V_{xx}$

$du = V_x \qquad v = V_x$

$$E'(t) = V V_x \Big|_0^l - \int_0^l V_x^2\,dx$$

$$E'(t) = [\underbrace{V(l,t)V_x(l,t)}_{0} - \underbrace{V(0,t)V_x(0,t)}_{0}] - \int_0^l V_x^2\,dx$$

$$E'(t) = -\int_0^l V_x^2\,dx \leq 0 \Rightarrow \text{تناقص } E(t)$$

$E(0) = 0 \Rightarrow E(t) \leq 0 \qquad x \in [0,l]$

$E(t) \geq 0$ ومن $(**)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2k^2}\int_0^l V^2(x,t)\,dx = 0 \Rightarrow V^2(x,t) = 0 \Rightarrow V(x,t) = 0$$

اي ان الفرق بين الحلين يساوي صفر اذاً