قسم الرياضيات — ٢٤٢ ريض الاختبار النهائي
جامعة الملك سعود — الفصل الثاني ٢٧/١٤٢٦
٠٦/٢٠٠٥

س١ اوجد الحل العام للمعادلة: $x^2 u_x + y^2 u_y = xy$

س٢ اوجد حل المسألة: $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 1<r<2$
$u(1,\theta) = 2, \quad u(2,\theta) = 1$

س٣ اوجد حل المسألة:
$$u_{tt} = k^2 u_{xx} \qquad 0<x<1,\ t>0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0 \qquad t>0$$
$$u(x,0) = 1, \quad u_t(x,0) = 0 \qquad 0<x<1$$

س٤ اوجد حل النظام:
$$u_t = 16u_{xx} + x \qquad 0<x<3,\ t>0$$
$$u(0,t) = u(3,t) = 0 \qquad t>0$$
$$u(x,0) = 0 \qquad 0<x<1$$

س٥ اوجد حل المسألة:
$$u_t = u_{xx} \qquad 0<x<\infty,\ t>0$$
$$u_x(0,t) = 0 \qquad t>0$$
ثم أثبت أن $u(0,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1+\lambda\sin\lambda - \cos\lambda}{1+\lambda^2} e^{-\lambda^2 t}\, d\lambda$

س٦ (i) أثبت أن حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في $\mathbb{R}^3$ بالاحداثيات الكروية هو $u(\rho,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho^n + b_n\rho^{-n-1})P_n(\cos\phi)$
على افتراض أن u لا تعتمد على الزاوية θ.
(ii) استخدم هذه النتيجة للحصول على الحل داخل الكرة $0 \le \rho \le 2$
الذي يحقق $u(2,\phi) = 1 - \cos\phi$،
مع العلم أن $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\cot\phi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\phi}$