جامعة الملك سعود - كلية العلوم

قسم الرياضيات

المدة: ثلاث ساعات

الإختبار النهائي في 379 ريض

الفصل الدراسي الثاني 1434-1435هـ

5 1. ليكن المستقيم $l = P + [v]$ ، حيث $P = (1,1)$ و $v = (4,3)$.

أ. أوجد معادلة المستقيم m الذي يمر بالنقطة $Q = (-2,1)$ وعمودي على l .

ب. لتكن F قدم Q على l . أوجد F ثم احسب المسافة $d(F,Q)$.

5 2. ليكن l مستقيما اتجاهه متجه الوحدة v ، وليكن المستقيمان $\alpha = P + [v^{\perp}]$ و $\beta = Q + [v^{\perp}]$ حيث Q, P نقطتان مختلفتان من l . أوجد صيغة $\Omega_\alpha \Omega_\beta$.

6 3. (أ) أوجد صيغة الإنعكاس Ω_l في المستقيم l الذي معادلته $y = x - 1$.

(ب) أوجد صيغة الدوران الذي مركزه النقطة $P = (2,1)$ وزاويته $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

(ج) أوجد المصفوفة التي تمثل الإنعكاس في المستقيم الذي معادلته $2y = x$.

4 4. أثبت أنه إذا كان l مستقيما في H^2 فإن الإنعكاس Ω_l في l يحقق المعادلة $\Omega_l^{\,2} = I$.

6 5. لتكن $P = (0,1,\sqrt{2})$ و $Q = (\sqrt{2},0,\sqrt{3})$ نقطتين في H^2 .

(أ) أثبت أن P و Q تنتميان لـ H^2 .

(ب) أوجد معادلة وسيطية للمستقيم في H^2 الذي يمر بكل من P و Q ، ثم تحقق أن P و Q تنتميان لهذا المستقيم .

5 6. لتكن R, Q, P ثلاث نقاط مختلفة في H^2. أثبت أن $(P \times Q) \times (P \times R)$ متجه زمني .

9 7. (أ) أوجد صيغة وسيطية للمستقيم α في H^2 والذي قطبه $\xi = (-1,1,1)$.

(ب) أوجد صيغة الإنعكاس Ω_α .

(ج) ليكن β المستقيم الذي قطبه $\eta = (-2,1,2)$. أوجد صورة β بالإنعكاس Ω_α .

⑤ أولاً:

$v=(4,3)$ $P=(1,1)$ $\ell=P+[v]$

$m\perp\ell$ $Q=(-2,1)\in m$

$m=Q+[N)$ $N=\frac{v^\perp}{|v|}=\frac{(-3,4)}{5}$ ؟

$m: \left\langle\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}, N^\perp\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right\rangle=0 \Leftrightarrow 4(x+2)+3(y-1)=0$

$4x+3y+5=0$

2 ب:

$F=Q-\langle Q-P,N\rangle N$ $N=\frac{v^\perp}{|v|}$

2

$=(-2,1)-\left\langle\begin{pmatrix}-2-1\\1-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}\right\rangle(-3/5,4/5)$

$=(-2,1)-3/5(2+1)(-3/5,4/5)$

$=\left(\frac{-23}{25},\frac{-11}{25}\right)$

1

$d(F,Q)=|\langle Q-P,N\rangle|=9/5$

⑤ ثانياً:

$\alpha=P+[v^\perp]$ $\beta=Q+[v^\perp]$ $(|v|=1)$ v مع ℓ

$P,Q\in\ell$

$\Omega_\alpha\Omega_\beta(x)=\Omega_\alpha(x-2\langle x-Q,N\rangle N)$ $N=(v^\perp)^\perp=v$

$=x-2\langle x-Q,N\rangle N-2\langle x-2\langle x-Q,N\rangle N-P,N\rangle N$

$=x-2\langle x-Q,N\rangle N-2\langle x-P,N\rangle N+4\langle x-Q,N\rangle\langle N,N\rangle N$

$=x+2\langle x-Q,N\rangle N-2\langle x-P,N\rangle N$

$=x+2\langle x-Q-x+P,N\rangle N$

$=x+2\langle P-Q,N\rangle N=x+2(P-Q)$

$=\tau_{2(P-Q)}$

⑥ السؤال: (أ)

$P=(1,0)\in\ell$ $\ell: y=x-1$

$N=\frac{(-1,1)}{\sqrt2}$ $y-x+1=0$

2

$\Omega_\ell(x,y)=(x,y)-2\left\langle\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt2\\1/\sqrt2\end{pmatrix}\right\rangle\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$=(x,y)-\frac{2}{\sqrt2}(-x+1+y)\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$=(x,y)-(x-1-y,-x+1+y)$

$=(\cancel{x}-\cancel{x}+1+y,\cancel{y}+x-1-\cancel{y})=(y+1,x-1)$

* تابع ... الثالث:

(ب) $R_{P,\theta}$: $P=(2,1)$, $\theta=\pi/4$

$$\rho_{P,\theta} = \tau_P \,\text{rot}_\theta\, \tau_{-P}$$

$$\rho_{P,\theta}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

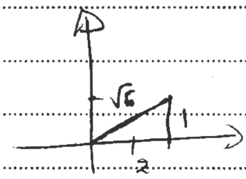
2

$$= \left(\frac{x-2-y+1}{\sqrt{2}} + 2,\ \frac{x-2+y-1}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{x-y-1}{\sqrt{2}} + 2,\ \frac{x+y-3}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

(ج) Ω_ℓ $\quad \ell: 2y = x$

$$\text{ref}_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$



$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\theta = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 4/5 \qquad \cos 2\theta = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = 3/5$$

$$\text{ref}_\theta = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

---

(4) الرابع: ℓ في H^2 ليكن ξ قطب ℓ

$$\Omega_\ell(x) = x - 2b(x,\xi)\xi$$

$$\Omega_\ell^2(x) = \Omega_\ell(x - 2b(x,\xi)\xi) = x - 2b(x,\xi)\xi - 2b(x - 2b(x,\xi)\xi,\xi)\xi$$

$$= x - 2b(x,\xi)\xi - 2b(x,\xi)\xi + 4b(x,\xi)b(\xi,\xi)\xi$$

$$= x$$

---

(5) الخامس: $Q = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{3})$ $\quad P = (0, 1, \sqrt{2})$

(أ) $H^2 \ni P,Q$ لأن ;

1

$$b(P,P) = 0 + 1 - 2 = -1$$

$$b(Q,Q) = 2 + 0 - 3 = -1$$

(ب)

$$P\times Q = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{3}, 2, \sqrt{2})$$

$$|P\times Q| = \sqrt{3 + 4 - 2} = \sqrt{5}$$

تابع الخامس

$$\xi = \frac{P\times Q}{|P\times Q|} = \left(\frac{\sqrt3}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}, \frac{\sqrt2}{\sqrt5}\right)$$

$$e_1 = \xi \times P = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\sqrt3}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{\sqrt2}{\sqrt5} \\ 0 & 1 & \sqrt2 \end{vmatrix} = \left(\frac{2\sqrt2}{\sqrt5} - \frac{\sqrt2}{\sqrt5}, -\frac{\sqrt2 . \sqrt3}{\sqrt5}, -\frac{\sqrt3}{\sqrt5}\right)$$

3/

$$e_1 = \left(\frac{\sqrt2}{\sqrt5}, -\frac{\sqrt6}{\sqrt5}, -\frac{\sqrt3}{\sqrt5}\right)$$

$$\alpha(t) = \cosh t\, P + \sinh t\, e_1 = \left(\frac{\sqrt2}{\sqrt5}\sinh t, \cosh t - \frac{\sqrt6}{\sqrt5}\sinh t, \sqrt2\cosh t - \frac{\sqrt3}{\sqrt5}\sinh t\right)$$

$P = \alpha(0)$ $\qquad Q \overset{?}{=} \alpha(t_0)$ $\qquad Q = (\sqrt2, 0, \sqrt3)$

2/

$$\begin{cases} \frac{\sqrt2}{\sqrt5}\sinh t_0 = \sqrt2 & \Rightarrow \boxed{\sinh t_0 = \sqrt5} \\ \cosh t_0 - \frac{\sqrt6}{\sqrt5}\sinh t_0 = 0 & \cosh t_0 = \frac{\sqrt6}{\cancel{\sqrt5}}\cancel{\sqrt5} = \sqrt6 \\ \sqrt2\cosh t_0 - \frac{\sqrt3}{\sqrt5}\sinh t_0 = \sqrt3 & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{e^{t_0}+e^{-t_0}}{2} = \sqrt6 \\ \frac{e^{t_0}-e^{-t_0}}{2} = \sqrt5 \end{cases} \Rightarrow e^{t_0} = \sqrt5 + \sqrt6$$

$$\text{ie} \quad t_0 = \ln(\sqrt5+\sqrt6)$$

$$\Rightarrow Q = \alpha\left(\ln(\sqrt5+\sqrt6)\right)$$

---

5) السادس: $P, Q, R \in H^2$ (مختلفة).

نعرف: المستقيم $\overleftrightarrow{PQ}$ قطبه $\xi = \frac{P\times Q}{|P\times Q|}$

" $\overleftrightarrow{PR}$ " $\eta = \frac{P\times R}{|P\times R|}$

بما أن ξ و η مختلفان ومختلفان $\Leftarrow$ $\{\xi, \eta, \xi\times\eta\}$ أساس لـ R_1^3

وهذا يستلزم أن $\xi\times\eta$ زمني.

طريقة أخرى:

$$(P\times Q)\times(P\times R) = b(Q, P\times R)P - b(P, P\times R)Q$$

$$= b(Q, P\times R)P$$

وبما أن $P \in H^2$ فإن $b(Q, P\times R)P$ زمني.

السابع (9) (أ) α : قطبه $\xi=(-1,1,1)$

$$\alpha=\{x\in H^2;\ b(x,\xi)=0\}$$
$$=\{(x,y,z):\ x^2+y^2-z^2=-1,\ -x+y-z=0\}$$

$$x^2+y^2-(-x+y)^2=-1 \iff 2xy=-1 \qquad \boxed{y=-\frac{1}{2x}}$$
$$\boxed{z=-x-\frac{1}{2x}}$$

لتكن $\alpha \ni P=\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

$$e_1=P\times\xi$$

4

$$e_1=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1/2 & -3/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha(t)=\cosh t\,P+\sinh t\,e_1$$
$$=\left(\cosh t+\sinh t,\ -\frac{1}{2}\cosh t+\frac{1}{2}\sinh t,\ -\frac{3}{2}\cosh t-\frac{1}{2}\sinh t\right)$$
$$=\left(e^t,\ -\frac{e^{-t}}{2},\ -e^t-\frac{e^{-t}}{2}\right)$$

$\Omega_\alpha(x)=x-2b(x,\xi)\xi$

(ب)

$$\Omega_\alpha(x,y,z)=(x,y,z)-2(-x+y-z)(-1,1,1)$$
$$=\left(x+2(-x+y-z),\ y-2(-x+y-z),\ z-2(-x+y-z)\right)$$
$$=\left(-x+2y-2z,\ 2x-y+2z,\ 2x-2y+3z\right)$$

2

(ج) β قطبه $\eta=(-2,1,2)$

$$\Omega_\alpha\eta=(2+2-4,\ -4-1+4,\ -4-2+6)$$
$$=(0,-1,0)$$

$$\Omega_\alpha(\beta)=\{(x,y,z)\in H^2:\ b((x,y,z),\Omega_\alpha\eta)=0\}$$
$$=\{(x,y,z):\ x^2+y^2-z^2=-1,\ -y=0\}$$
$$=\{(x,0,z):\ x^2-z^2=-1\}$$

3

وهو قطع زائد يقع في المستوى $y=0$

[illegible]
[illegible]