Chapter 7

The Schrödinger Equation

مقدمة

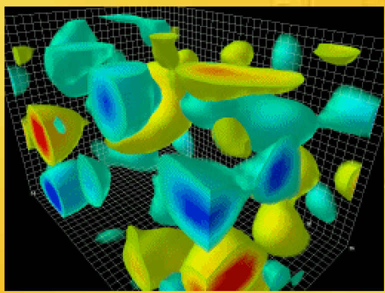
قبل بداية القرن العشرين كان لدى العلماء اعتقاد راسخ بأن العالم الفيزيائى ينقسم إلى عالمين ... علم الموجات وعالم الجسيمات. وكان الاقتناع أن العالم المادى مكون من أجزاء كروية صغيرة مثل الذرات والجزيئات والتى تتفاعل مع بعضها البعض لتنتج مواد مختلفة، حيه وغير حيه، والتى نراها حولنا. وكان لدى العلماء أيضاً نظرية جيدة جدا تصف كيف ينتشر الضوء فى صورة موجات كهرومغناطيسية مماثلة لموجات المياه فى بحيرة ساكنه عندما تسقط حجرا بها.

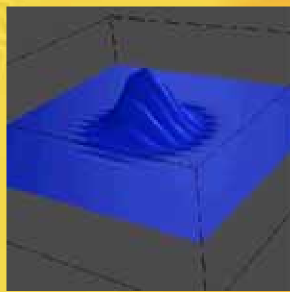
باختصار كان اكتمال الفيزياء النظرية وحل جميع الألغاز الكبيرة على مدى بصر العلماء. ولكن عند بداية القرن العشرين اكتشف العلماء أنه لابد من البحث عن نظرية جديده تفسر ألغاز لا يوجد لها حل فى النظرية النمطية لقد وجدوا أنه أحيانا يمكن أن يتصرف الضوء كموجات ولكن فى أحيانا أخرى يتصرف كجسيمات تسمى "فوتونات" وكأن ذلك ليس كافيا فقد اكتشف العلماء بعد ذلك بقليل أن الجسيمات "مثل الإلكترونات" تتصرف أحيانا كموجات .

في الباب السابق عرفنا أنه يمكن إيجاد دالة موجية لأي جسيم مما يدل على أنه الجسم المتحرك يعبر عنه بمجموعة موجات ديبرولي بدلاً من من وحدة نقطية متمركزة

هذه النتيجة عمقت مفهومنا في حركة الإلكترون.

ولكن هذه الزيادة في المعرفة جعلت على حسابها تضحية في دقة حساب الكميات . وتشير إلى وجود أخطاء لا يمكن السيطرة عليها في تحديد الصفات الجسيمية.





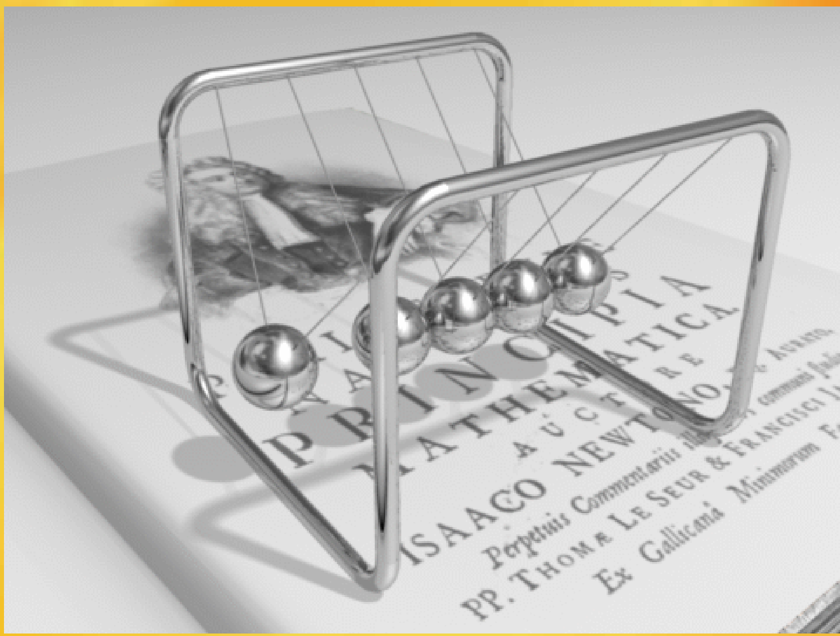
تفسير الطبيعة الموجية للجسيمات

نفترض العلاقة بين احتمالية مشاهدة الجسيم ومربع سعة موجته يماثل تماما العلاقة بين احتمالية مشاهدة الفوتون ومربع سعته E^2

فإذا رمزنا لسعة موجة الجسيم بالرمز ψ ونسميها الدالة الموجية wave function فإن الدالة الموجية ψ هي كمية فيزيائية مربعها ψ^2 يتناسب طردياً مع احتمالية رصد الجسيم المادي عند نقطة معينة في الفراغ في وحدة الزمن ..

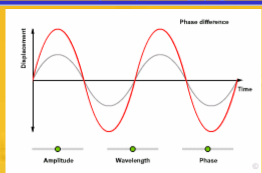
وعلى هذا فإن الدالة الموجية للجسيم تماثل المجال الكهربي للفوتون, ومثلما تكون E دالة تعتمد على كلاً من الزمان والمكان فإن ψ أيضاً دالة في الزمان والمكان. وحيث انه من غير الممكن تحديد موقع أي فوتون عند لحظة معينة من الزمن بدقة متناهية ولكن من الممكن فقط تحديد الاحتمالية E^2 لمشاهدة الفوتون في وحدة الزمن, وبالمثل من غير الممكن تحديد موقع أي جسيم مادي عند أي لحظة من الزمن بدقة متناهية ولكن من الممكن تحديد احتمالية وجوده ψ^2 عند موقع في الفراغ في لحظة معينة وعلى هذا الأساس فإن الدالة الموجية y للجسيم تعبر عن توزيع احتمالية تواجده المكاني ..

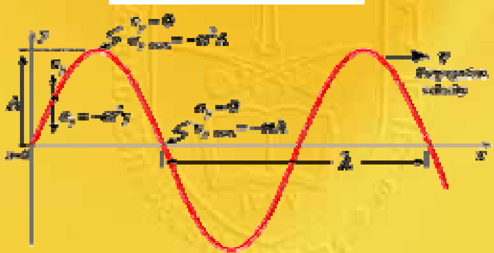
الميكانيكا الموجية wave mechanics هو فرع من فروع الفيزياء يعني بحساب قيم ψ في حالات معينة مثل الدالة الموجية للإلكترون في الذرة ومنها يمكن استنتاج طاقة الإلكترون وكمية حركته ..



Wave packet Description of material partcals

وصف الرزم الموجية للجسيمات المادية





Description of the transverse motion.

$\frac{2\pi v}{\lambda} = 2\pi f = \omega$

$v = f\lambda$

$$y(x,t) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

$$v_y(x,t) = \frac{dy}{dt} = -\omega A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

$$a_y(x,t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y = -\omega^2 A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

في الغالب توصف الحركة الموجية في إتجاه محور x بالعلاقة التالية:

$$y(x,t) = A \sin(kx-\omega t)$$

Where;

$y(x,t) \equiv$ ***displacement*** [$E(x,t)$ for e.m waves or $p(x,t)$ for sound waves]

$k \equiv$ ***wave number*** or propagation constant $= 2\pi/\lambda$

$\omega \equiv$ ***angular frequency*** $= 2\pi\nu$

بالمثل هل يمكن إفتراض أن الدالة الموجية (***wave function***) للموجة المرافقة للجسيم المادي يمكن كتابتها على الصورة:

$$\Psi(x,t) = A \sin(kx-\omega t) \qquad (*)$$

353 PHYS — Dr. Abdallah M.Azzeer — Page 7

هناك صعوبة لقبول صيغة هذه الموجة لكي تكون مترافقة مع الجسيم.

1 – شكل هذه الموجة لها إستمرارية في الفضاء أي تنتشر خلال مكان غير محدد (***unlocalized***) في حين أن الجسيم المادي يكون دائما في مكان محدد (***localized***) وبالتالي تؤدي هذه الصيغة للموجة فقدان الخواص الفيزيائية للجسيم.

2 – بالنظر الى سرعة إنتشار الموجة (سرعة الطور) v_{ph}

$$v_{ph} = \omega/k = \nu\lambda$$

وبإستخدام $E = h\nu$ و $p = h/\lambda$ للجسيم نجد أن :

$$v_{ph} = \left(\frac{E}{h}\right)\left(\frac{h}{p}\right) = \frac{E}{p}$$

وبإستخدام $E = mc^2$ و $p = mv$ حيث v تمثل سرعة الجسيم نجد:

$$v_{ph} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}$$

$$\therefore \quad \boxed{v_{ph} = \frac{c^2}{v}}$$

353 PHYS — Dr. Abdallah M.Azzeer — Page 8

$$v_{ph} = \frac{c^2}{v}$$

في حالة الفوتون $v = c$ وبالتالي تكون $v_{ph} = c$ وهذا صحيح كما هو متوقع

ولكن في حالة الجسيم المادي فإن $v < c$ وبالتالي تكون $v_{ph} > c$ وهذا غير صحيح لأن $v_{ph} = v$.

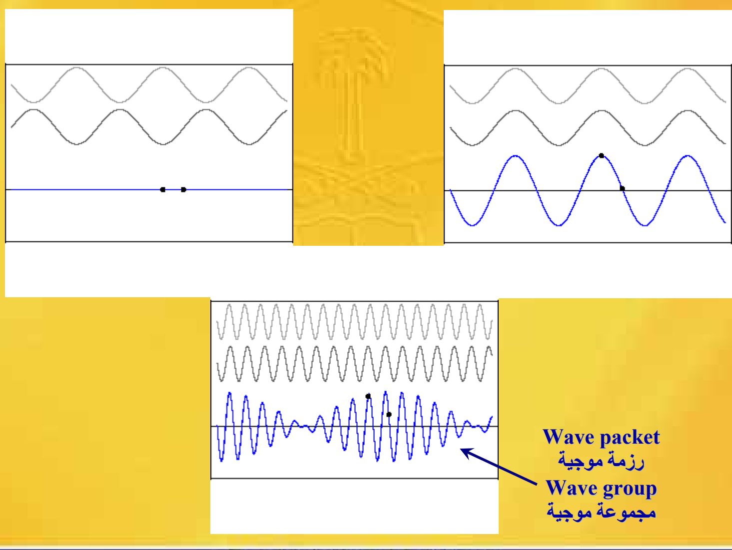
لذا تكون الصيغة الرياضية الممثلة ب (*) غير صحيحة للتعبير عن الموجة المرافقة للجسيم.

وللتغلب على هذه الصعوبة فإننا نفترض أن الدالة الموجية $\Psi(x,t)$ تمثل في الحقيقة مجموعة أمواج ذات ترددات وأطوال موجية مختلفة .

$$\Psi(x,t) = \sum_{k_i = k}^{k_i = k + \Delta k} A(k_i) \sin(k_i x - \omega_i t)$$

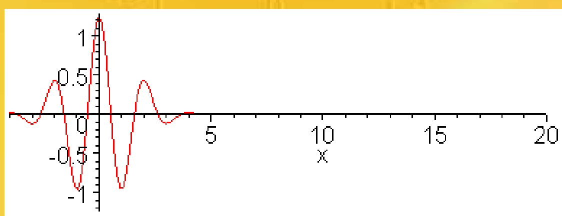
يعتمد المدى اللازم لـ Δk في الجمع أعلاه على درجة تحديد مكان الجسيم في الفضاء

إن جمع أمواج عديدة مختلفة التردد والسعة ينتج عنه قيم عالية في السعة بجانب الجسيم وقيم تتلاشى في أي مكان آخر



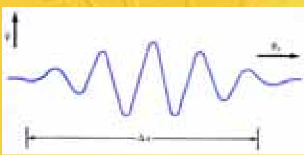
إذا الموجة تنتشر عبر فضاء ولكن الجسيم يقع في موضع كما هو في الفيزياء التقليدية . لذا لإعطاء الجسيم صفة الموجة يمكن إعتبار أن يُمثل برزمة موجية أي مجموع عدد من الأمواج المختلفة في التردد.

وبناء على ذلك فإن الجسيم يوجد داخل الرزمة الموجية التى تتحرك بسرعة الجسيم



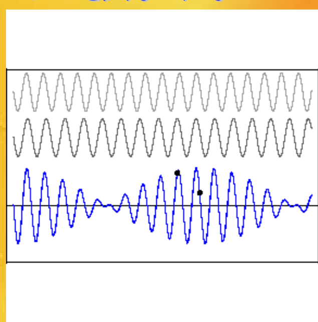
كيف يمكن تصور شكل موجة الإلكترون بالاعتماد على مبدأ الشك؟

ذكرنا سابقاً أن للإلكترون خصائص موجية وأن الإلكترون يمكن اعتباره موجه ولكن طبيعة هذه الموجة غير معروف وتم اعتبار الدالة الموجية Ψ هي الموجة المصاحبة للإلكترون. ومن مبدأ الشك يمكن الجمع بين الخاصية الجسيمية والخاصية الموجية باعتبار موجة تنتشر على مدى محدد في الفراغ وبالتأكيد فإن هذه الموجة لن تكون موجة جيبية لأن الموجة الجيبية غير محددة في الفراغ ولها امتداد لانهائي. واذا افترضنا مجموعة من الموجات الجيبية بترددات مختلفة تشكل نبضة موجية wave packet تنتشر على مدى محدد في الفراغ كما في الشكل يمكن ان تمثل موجة الإلكترون.



TWO WAVES SUPERPOSITION تراكب موجتين

$$y_1(x,t) = A\sin(k_1x - \omega_1 t)$$
$$y_2(x,t) = A\sin(k_2x - \omega_2 t)$$



$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\sin(k_1x - \omega_1 t) + A\sin(k_2x - \omega_2 t)$$

$$\text{using } \boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$y(x,t) = 2A\sin(\bar{k}x - \bar{\omega}t)\cos\left(\frac{\Delta kx}{2} - \frac{\Delta\omega t}{2}\right)$$

$$y(x,t) = 2A\,\underbrace{\sin\left(\bar{k}x - \bar{\omega}t\right)}_{\text{propagation}}\,\underbrace{\cos\left(\frac{\Delta kx}{2} - \frac{\Delta\omega t}{2}\right)}_{\text{Modulation Envelop}}$$

where $\bar{k} = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$, $\bar{\omega} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

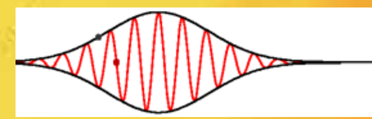
and $\Delta k = k_2 - k_1$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

Position of the peak (envelope):

$\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t = 0$

$\Delta k \cdot dx - \Delta\omega \cdot dt = 0$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$



$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{k}$$

ولكن تراكب موجتين لا يكوّن رزمة موجية.

وبالتالي يمكن تكوين رزمة موجية حقيقية بإستخدام عدد كبير من الأمواج لها سعات مناسبة :

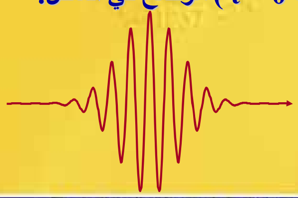
يمكن إستخدام جمع فورير **Fourier Sum**

$$y(x,t) = \sum A_i \sin(k_i x - \omega_i t)$$

وإذا كانت الفاصلة بين متجهات الأمواج وكذلك الفاصلة بين ترددات الأمواج صغيرة جدا ، فإنه يمكن تقريب الجمع أعلاه عن طريق تكامل فورير **Fourier Integral** :

$$y(x,t) = \int \boxed{A(k)} \cos(kx - \omega t)\,dk$$

ومثال على هذه الرزمة الموجية (عند $t = 0$) موضح في الشكل:



الرزمة الموجية الجاواسية

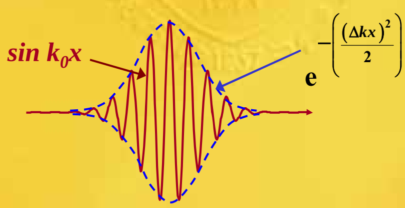
Gaussian wave packet

وهذه الرزمة الموجية الجاوسية تتكون على الصورة:

$$y(x) = \sqrt{2\pi}\,\Delta k\; e^{-\left(\frac{(\Delta k x)^2}{2}\right)} \sin k_0 x$$

إذا كان:

$$A(k) = e^{-\left(\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2}\right)}$$



phase velocity : $\quad v_p = \dfrac{\omega}{k}$

group velocity : $\quad v_g = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow v_g = \dfrac{d\,\omega}{d\,k}$

angular velocity of de Broglie waves

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi m c^2}{h} = \frac{2\pi m_0 c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}$$

wave number of de Broglie waves

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi m v}{h} = \frac{2\pi m_0 v}{h\sqrt{1-\beta^2}}$$

group velocity of de Broglie waves

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega/dv}{dk/dv} = v$$

De Broglie group velocity : same as particle velocity

$$v_g = v$$

De Broglie phase velocity

$$\mathrm{v}_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c^2}{\mathrm{v}} \rightarrow \quad c > \mathrm{v}\,;\, \mathrm{v}_p > c$$

Example: **Electron has** $\lambda = 2\ \mathrm{pm}$ **find** $\mathrm{KE}, \mathrm{v_p}, \mathrm{v_g} = ?$

- $KE = E - E_0 = 803\,\mathrm{keV} - 511\,\mathrm{keV} = 292\,\mathrm{keV}$
- $E = E_0\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \mathrm{v} = c\sqrt{1-\frac{E_0^2}{E^2}} = 0.771c = \mathrm{v}_g$

$$\mathrm{v}_p = \frac{c^2}{\mathrm{v}} = 1.30c$$

All particle motion should be considered by

How about photon ? $\lambda = \dfrac{h}{p}$

$$\mathrm{v}_g = c$$

$$\mathrm{v}_p = c$$