The Compton Effect تأثير (تشتت) كومتن

مقدمة:

في الظاهرة الكهروضوئية يعطي الفوتون كامل طاقته للإلكترون المرتبط بسطح المادة، ولكن في بعض الأحيان يمكن أن يعطي الفوتون جزء من طاقته إلى إلكترون حر وهذا النوع من التفاعل بين الشعاع الكهرومغناطيسي والالكترون يسمى بتشتت (Scattering) الفوتونات بواسطة الإلكترون .

وتعنى ظاهرة كومتن (Compton effect) بتشتت الأشعة السينية (أو عموما الأمواج الكهرومغناطيسية) بالإلكترونات الحرة .

فحسب النظرية الكهرومغناطيسية التقليدية ، عندما تسقط موجة كهرومغناطيسية ذات تردد ν على جسيمات حرة مشحونة مثل الإلكترونات فإن هذه الجسيمات تمتص الإشعة الكهرومغناطيسية وبالتالي تتذبذب بتردد ν.

هذه الجسيمات المترددة تشع مرة أخرى أمواج كهرومغناطيسية لها نفس التردد ν . هذا النوع من التشتت والذي لا يحدث تغيراً في طول الموجة الساقطة يسمى بالتشتت المترابط (coherent scattering) . وقد لوحظ هذا التشتت في منطقة الإشعاع المرئي وفي منطقة ذات الطوال الموجية الطويلة .

ولكن عند ملاحظة تشتت الأشعة ذات الأطوال الموجية القصيرة مثل الأشعة السينية وجد أن تفسير النظرية التقليدية يفشل . حيث أن تشتت الأشعة السينية ينتج من ذلك ترددين مختلفين أولهما ν (أو λ) والآخر له تردد أقل من التردد الأصلي للأشعة الساقطة $\nu_s < \nu$ أو $\lambda_s > \lambda$.

ويطلق على طول الموجة λ بالموجة الغير معدلة (unmodified wavelength) وطول الموجة λ_s بالموجة المعدلة (modified wavelength) .

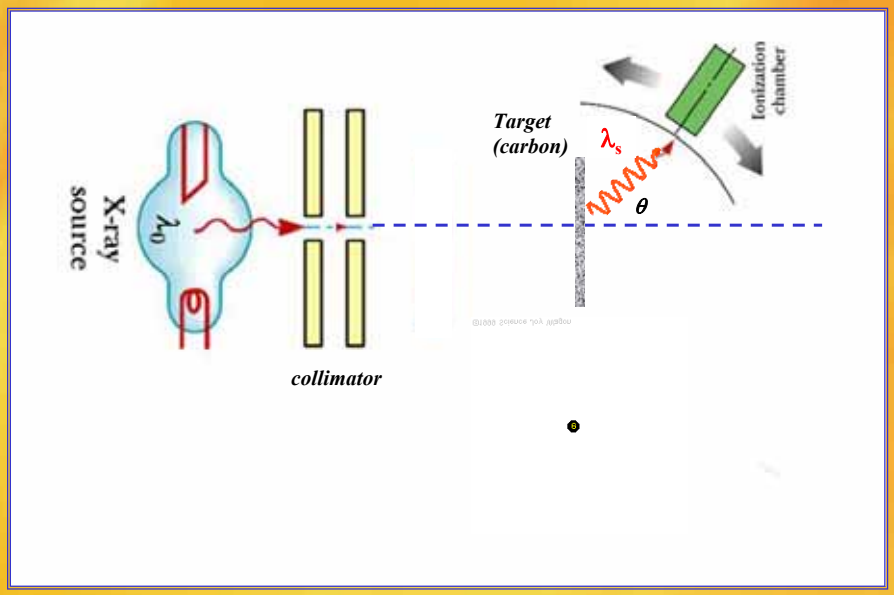
وهذا النوع من التشتت يطلق علية بالتشتت الغير مترابط (incoherent scattering) .

وقد فسر كومتون وجود الأطوال الموجية المتشتتة والمعدلة الناتجة من سقوط أشعة سينية بإستخام الصفة الجسيمية والكمية للإشعاع الكهرومغناطيسي وتطبيق قانوني حفظ الطاقة وكمية الحركة في التصادم المرن .

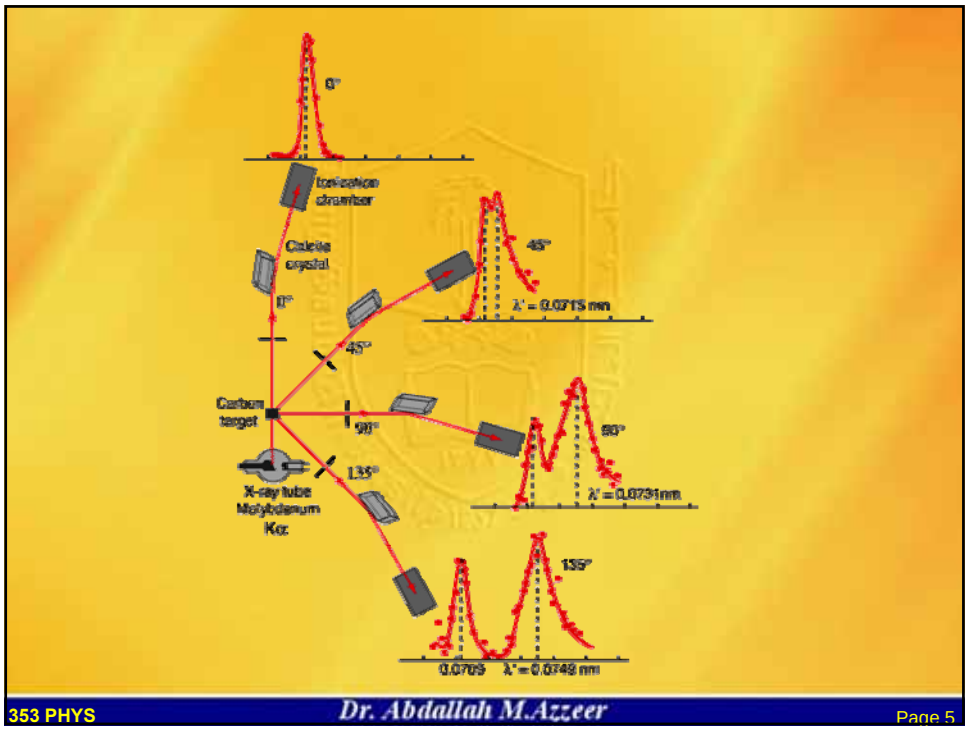
تعتمد ظاهرة كومتون في تفسيرها على ان الضوء يتكون من فوتونات لها طاقة وكمية حركة ولا يمكن تفسيرها على اعتبار النموذج الموجي للضوء. تم التحقق من هذه الظاهرة عملياً في عام 1923 في جامعة سانت لويس من قبل كومتون وذلك بإسقاط أشعة اكس على لوح من الكربون كما هو موضح في الشكل التالي :

353 PHYS Dr. Abdallah M.Azzeer Page 3

Experimental arrangement for observing Compton scattering



353 PHYS Dr. Abdallah M.Azzeer Page 4



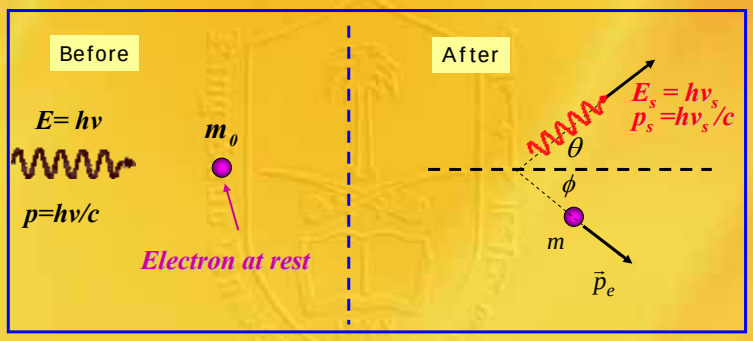
وكانت نتائج التجربة على النحو التالي :

- وجد ان الاشعة المشتتة لها طولين موجيين هما λ و λ_s بالرغم من أن الشعاع الساقط يحتوي على طول موجي وحيد λ
- تم قياس الفرق في الطول الموجي للفوتونات المشتتة ووجد إنها تعتمد على زاوية تشتت الأشعة المشتتة حيث ان هذا الفرق يكون أكبر ما يمكن عندما تكون الزاوية 180 درجة .

$$\Delta\lambda = \lambda_s - \lambda$$

- اذا ما تم الاعتماد على النموذج الموجي للاشعة الكهرومغناطيسية لايمكن ايجاد تفسير للزيادة في الطول الموجي للاشعة المشتتة من لوح الكربون لأن حب النظرية الكلاسيكية فإن الكترونا ذرات الكربون سوف تتذبذب بنفس تردد الفوتونات الساقطة ولا يحدث في هذه الحالة اية زيادة تطرأ على الطول الموجي للفوتونات المشتتة بل انها سوف تحتوي على نفس الطول الموجي .

- ولتفسير هذه الظاهرة اعتمد كومتون على ان الاشعة الساقطة تتكون من سيل من الفوتونات لها طاقة وكمية حركة



وعندما تتصادم بعض من هذه الفوتونات مع الالكترونات في لوح الكربون فإنها تفقد جزء من طاقتها كما أن الجزء الآخر من الفوتونات يصطدم بالإلكترونات تصادم مرناً فلا تفقد طاقتها وهذا ما يؤدي إلى الحصول على طوليين موجيين..

وحيث أن الفوتونات المشتتة تفقد جزء من طاقتها فإن ذلك يؤدي إلى أن الطول الموجي للفوتونات المشتتة أكبر من الطول الموجي للفوتونات الساقطة أي أن

$$\lambda_s > \lambda$$

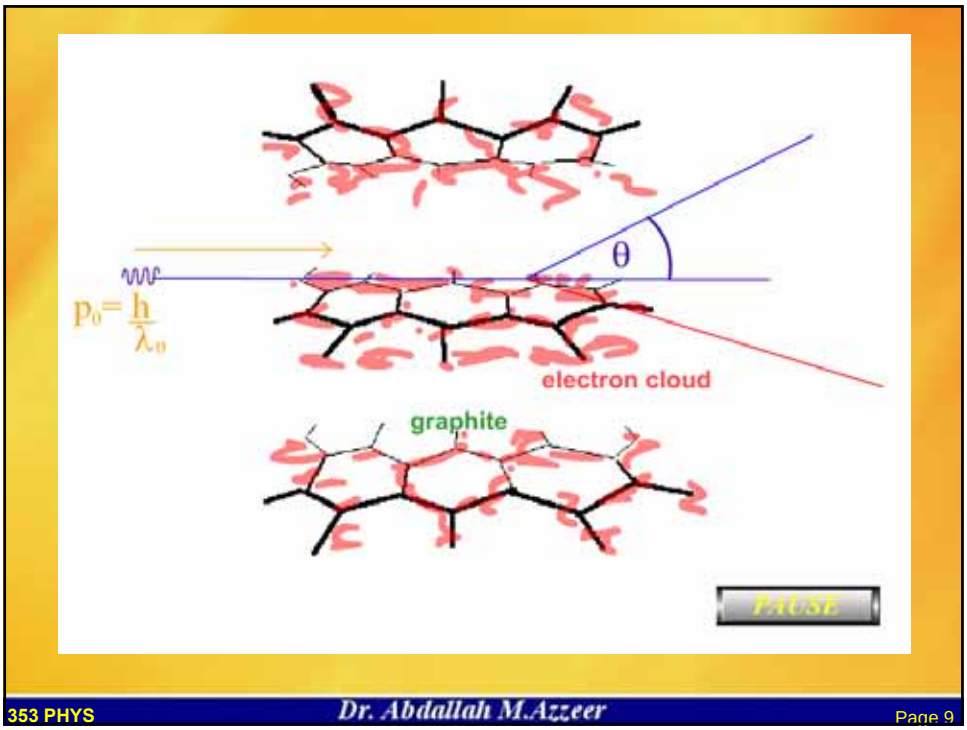
ولتفسير هذه النتيجة وإيجاد علاقة رياضية تربط بين التغير في الطول وزاوية التشتت فإننا نعتبر التصادم بين فوتون وإلكترون حر على النحو التالي :

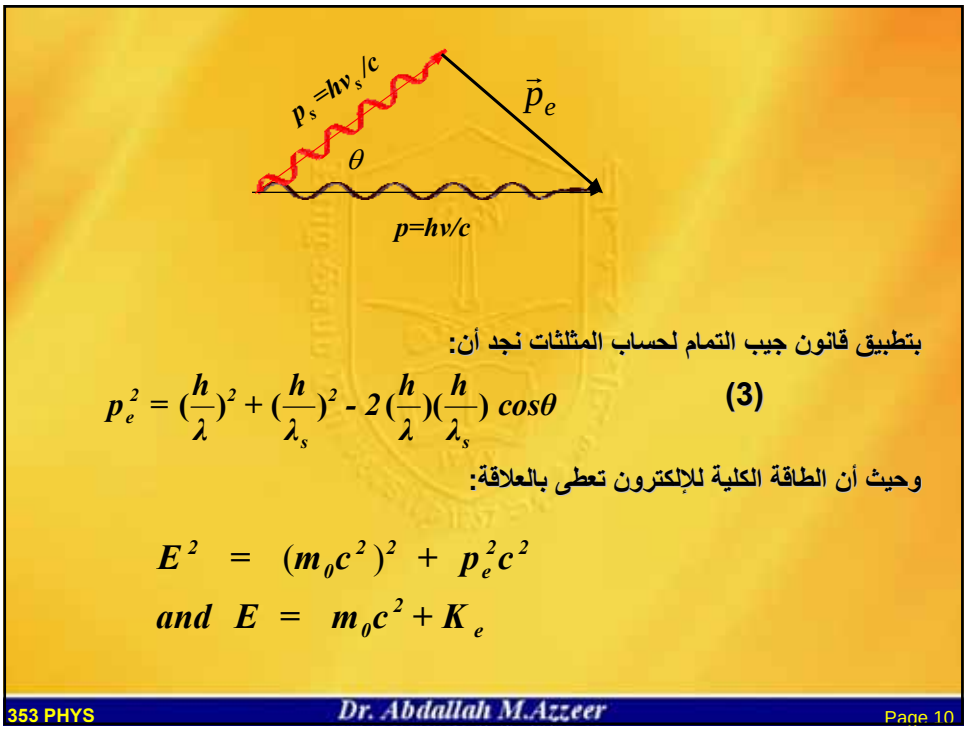
قانون حفظ الكتلة-الطاقة يعطى العلاقة:

$$\overbrace{\frac{hc}{\lambda}}^{\text{photon}} + \overbrace{m_0c^2}^{\text{electron}} = \overbrace{\frac{hc}{\lambda_s}}^{\text{photon}} + \overbrace{(m_0c^2 + K_e)}^{\text{electron}} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad K_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_s} \qquad (2)$$

في حين أن قانون حفظ كمية الحركة الخطية يمكن الحصول علية بإعادة ترتيب متجهات كمية الحركة للفوتون والإلكترون الحر بعد التصادم كما في الشكل التالي :


θ
$p_0 = \frac{h}{\lambda_0}$
electron cloud
graphite
PAUSE
353 PHYS
Dr. Abdallah M.Azzeer
Page 9


$p_s = h\nu_s/c$
$\vec{p}_e$
θ
p=hν/c
بتطبيق قانون جيب التمام لحساب المثلثات نجد أن:
$p_e^2 = (\frac{h}{\lambda})^2 + (\frac{h}{\lambda_s})^2 - 2(\frac{h}{\lambda})(\frac{h}{\lambda_s})\cos\theta$ (3)
وحيث أن الطاقة الكلية للإلكترون تعطى بالعلاقة:
$E^2 = (m_0c^2)^2 + p_e^2c^2$
$and \quad E = m_0c^2 + K_e$
353 PHYS
Dr. Abdallah M.Azzeer
Page 10

$$K_e^2 + (m_0c^2)^2 + 2K_e m_0 c^2 = p_e^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$\therefore \quad p_e^2 = (\frac{K_e}{c})^2 + 2K_e m_0 \qquad (4)$$

بمساواة المعادلة (3) و (4) والتعويض في (2) نجد :

$$(\frac{h}{\lambda})^2 + (\frac{h}{\lambda_s})^2 - 2(\frac{h}{\lambda})(\frac{h}{\lambda_s})\cos\theta = (\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda_s})^2 + 2m_0 c(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda_s})$$

بتبسيط جبري

$$\Delta\lambda \equiv \lambda_s - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) \qquad (5)$$

وحيث أن $\lambda\nu = \lambda_s\nu_s = c$ فإن:

$$h\nu_s = \frac{h\nu}{1 + (\frac{h\nu}{m_0 c^2})[1 - \cos\theta]} \qquad (6)$$

العلاقة (5) هي المعادلة الرياضية لظاهرة كومتون والتي توضح العلاقة بين التغير في الطول الموجي للفوتونات المتشتتة $\Delta\lambda$ وزاوية التشتت θ . تعتمد قيمة $\Delta\lambda$ على كتلة السكون للجسم (m_0) وثابت بلانك (h) وسرعة الضوء c وزاوية التشتت θ .

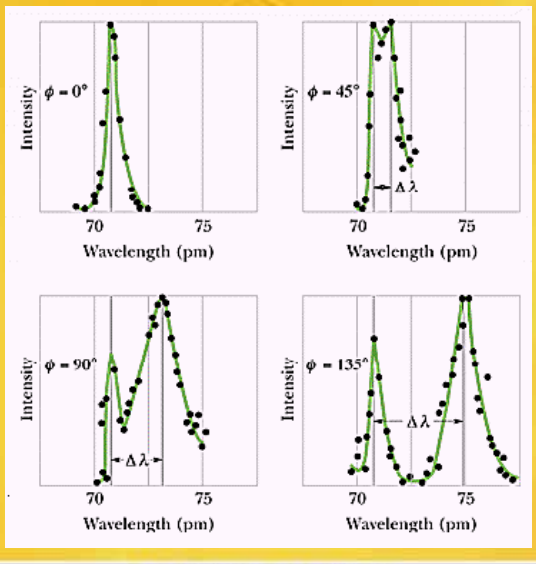
المقدار (h/m_0c) له أبعاد الطول ويسمى بالطول الموجي لكومتون *compton wavelength* وبالتعويض عن قيمة الثوابت في حالة الإلكترون نجد أن:

$$\lambda_C \equiv h/m_0 c = 0.02426 \text{ Å}$$

وعند التعويض في معادلة كومتون عن قيم مختلفة للزاوية θ نجد أن:

θ(deg)	Δλ (Å)
0	0
90	0.024
180	0.048

يلاحظ أنه في حالة الزاوية 180° يكون التغير في الطول الموجي اكبر ما يمكن وعندها يكون التصادم بين الفوتون والإلكترون تصادما مباشر (head-on-collision)



يمكن فقط قياس التغير في الطول الموجي عندما يكون الفوتون ذو طول موجي صغير أي في مدى أشعة اكس والأشعة الأصغر منه. فمثلاً اذا كان الطول الموجي للفوتون 4000 انجستروم فإن الزيادة في الطول الموجي نتيجة لظاهرة كومتون

$$\lambda = 4000\ \text{Å} \qquad \Delta\lambda/\lambda = 0.006\%$$

وهذا التغير صغير جدا ولا يمكن قياسه أما إذا كان الطول الموجي للفوتون الساقط 1 انجستروم فإن الزيادة في الطول الموجي نتيجة لظاهرة كومتون

$$\lambda = 1\ \text{Å} \qquad \Delta\lambda/\lambda = 0.3\%$$

ولهذا تلاحظ ظاهرة كومتون عند الأطوال الموجية الصغيرة

ويلاحظ أن التأثير الكمي يتجلى بوضوح نتيجة وجود ثابت بلانك (h) وبالتالى إذا آلت h إلى الصفر أو m_0 إلى المالانهاية (∞) فحسب المعادلة (5) λ_s تؤول إلى λ وهذا يشير إلى أنه في حال دراسة الظواهر الفيزيائية للأجسام الكبيرة نسبيا فإن النظرية الكمية تؤول الى النظرية التقليدية .

Example

Suppose that x-rays of 100 keV energy are incident on a target, and undergo Compton scattering. Calculate (a) the energy of the x-rays scattered at an angle of 30° to the direction of the incident. (b) the energy of the recoiling electron, (c) the angle of the recoiling electron.

a) In Eq. **(5)** we have

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta).$$

When we substitute $\lambda = hc/E$ and $\lambda' = hc/E'$, where E and E' are the energies of the incident and scattered x-rays, that is, $E = h\nu$ and $E' = h\nu'$, we get

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta),$$

where $E = 100$ keV, $m_0c^2 = 510$ keV, and $\cos\theta = \cos 30^\circ = 0.866$. Therefore

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{100\ \text{keV}} = \frac{1}{510\ \text{keV}}(1 - 0.866)$$

$$= \frac{0.134}{510\ \text{keV}} = \frac{1}{3810\ \text{keV}}$$

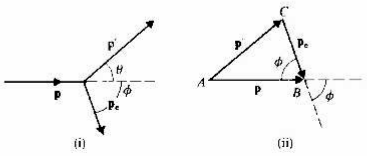
or

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{100\ \text{keV}} + \frac{1}{3810\ \text{keV}}.$$

Hence $E' = 97.5$ keV.

b) The kinetic energy K of the recoiling electron is

$$K = E - E' = (100 - 97.5)\ \text{keV} = 2.5\ \text{keV}.$$



c) Figure (i) shows that $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$, and $\mathbf{p}_e$ are the momenta of the incident x-ray, the scattered x-ray, and the recoiling electron, while Fig. (ii) shows the triangular relations between

these quantities. In order to find ϕ, we apply the law of cosines to triangle ABC,

$$p'^2 = p^2 + p_e^2 - 2pp_e \cos \phi,$$

or, rearranging and using $E = pc$ and $E' = p'c$ for photons, we get

$$\cos \phi = \frac{E^2 - E'^2 + p_e^2c^2}{2Ep_ec}.$$

But, for an electron,

$$E^2 = p_e^2c^2 + E_0^2,$$

where $E_0 = m_0c^2$ and $E = K + E_0$. Therefore $(K + E_0)^2 = p_e^2c^2 + E_0^2$ gives

$$p_ec = K\left(1 + \frac{2E_0}{K}\right)^{1/2},$$

which, when we substitute in Eq. (2.38), yields

$$\cos \phi = \frac{E^2 - E'^2 + K^2[1 + (2E_0/K)]}{2EK[1 + (2E_0/K)]^{1/2}}.$$

Substituting for $E = 100$ keV, $E' = 97.5$ keV, $K = 2.5$ keV, $E_0 = 510$ keV, we get

$$\cos \phi = 0.29, \qquad \phi = 73°.$$

مثال

إذا كان طول موجة الأشعة السينية الساقطة على لوح الكربون تساوي 0.01 انجستروم فما طول موجة الأشعة السينية التي تتشتت عند زاوية 30 درجة .

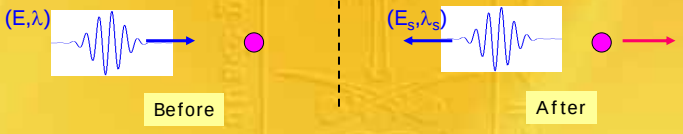
بالتعويض في معادلة كومتون

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

$$\therefore\ \lambda_s = \lambda + \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) = 0.013\ \text{Å}$$

Example

An X-ray beam of wavelength 0.01 nm strikes a target containing free electrons. Consider the X-rays that are 'backscattered' at 180°, and determine: a) the change in wavelength b) the change in photon energy c) the kinetic energy of the recoiling electron, and d) the electron's direction of motion.



a) $\theta = 180°$ so $\Delta\lambda = (2.43\text{ pm})(1-\cos\theta) = 4.86$ pm (maximum possible shift)

b) $E = hc/\lambda = (1240\text{ eV.nm})/0.01\text{ nm} = 124$ keV; $E_s = hc/(\lambda+\Delta\lambda) = 83$ keV
energy difference is $(E-E_s) = 41$ keV

c) To conserve energy, the electron must gain the energy lost by the photon:
$K = (E - E_s) = 41$ keV

d) To conserve momentum, the electron must move forward if the photon is scattered backwards, as shown.

353 PHYS Dr. Abdallah M.Azzeer Page 19

Worked example

A 0.110nm photon is scattered by a free electron initially at rest. After the collision, the electron moves forward and the photon recoils backwards. Find the kinetic energy of the scattered electron.

Solution The photon has been Compton scattered through 180 degrees.

Energy E of the initial photon = hc / λ

therefore $E_0 = (6.626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8) / (0.110 \times 10^{-9})(1.6 \times 10^{-19}) =$ **11.3 keV**

$\Delta\lambda = \lambda_s - \lambda_0 = (h/mc)(1-\cos\theta) = 2.43 \times 10^{-12}\text{ m}\,(1-\cos 180) = 4.86 \times 10^{-12}$ m

$\lambda_s = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0.110 + 0.00486 = 0.115$ nm

Energy E_s of the scattered photon = hc / λ'

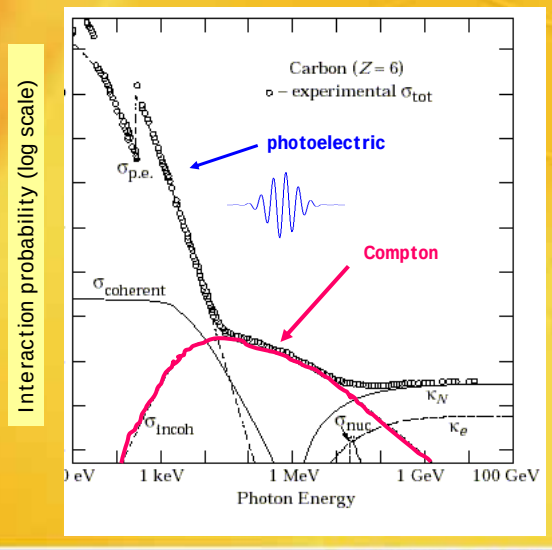
therefore $E_s = (6.626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8) / (0.115 \times 10^{-9})(1.6 \times 10^{-19}) =$ **10.8 keV**

The incident photon has lost 11.3 - 10.8 keV, which has been given to the electron, therefore the electron $K_e = 0.5$ keV.

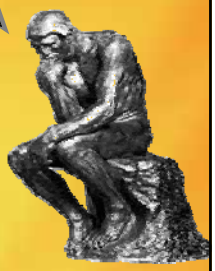
353 PHYS Dr. Abdallah M.Azzeer Page 20

Relevance today:

The **Compton effect** is the dominant process by which X-rays and γ-rays (10 keV – 10 MeV) deposit energy in matter.



Hmm, photon energy is transferred to the electron... maybe this is good for something?



Yes! Radiation therapy for cancer treatment...

353 PHYS Dr. Abdallah M.Azzeer Page 21

LECTURE: Indirect Radiation Effects

"How does radiation kill cancer cells?"
Your patients may not ask you, but your understanding of this basic principle will give you confidence when troubleshooting treatment plans. Click to begin simulation.

353 PHYS Dr. Abdallah M.Azzeer Page 22