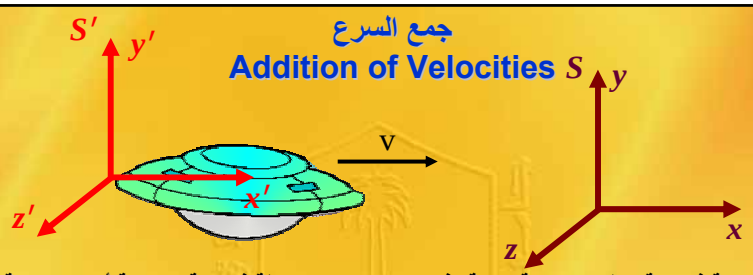
جمع السرع
Addition of Velocities



نفترض مركبة فضائية تنطلق بسرعة عالية (في إتجاه x)من محطة فضائية متحركة أيضا بسرعة عالية (في إتجاه x أيضا).

إذا كانت سرعة المحطة الفضائية v والمركبة u' فماهي سرعة المركبة (u) المقاسة في الإطار المرجعي الثابت ؟

$$dx = \gamma(dx' + \mathrm{v}\,dt')$$
$$dy = dy'$$
$$dz = dz'$$
$$dt = \gamma[dt' + (\mathrm{v}/c^2)dx']$$

بأخذ تفاضل تحويلات لورنتز (هنا بين الإطار المرجعي الثابت (S) وإطار المحطة الفضائية المتحركة (S')).

يمكن حساب سرعة المركبة الفضائية في الإطار المرجعي الثابت (u_x=dx/dt)

تحويلات السرعة للورنتز
The Lorentz Velocity Transformations

بتعريف السرع كالتالي

$u_x = dx/dt$, $u_y = dy/dt$, $u'_x = dx'/dt'$, etc.,

يمكن الحصول علي:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + \mathrm{v}\,dt')}{\gamma[dt' + (\mathrm{v}/c^2)\,dx']} = \frac{u'_x + \mathrm{v}}{1 + u'_x \mathrm{v}/c^2}$$

وبالمثل تكون u_y و u_z على الصورة:

لاحظ ظهور γ في u_y و u_z

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma[dt' + (\mathrm{v}/c^2)\,dx']} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x \mathrm{v}/c^2)}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma[dt' + (\mathrm{v}/c^2)\,dx']} = \frac{u'_z}{\gamma(1 + u'_x \mathrm{v}/c^2)}$$

التحويلات العكسية للسرعة للورنتز
The Inverse Lorentz Velocity Transformations

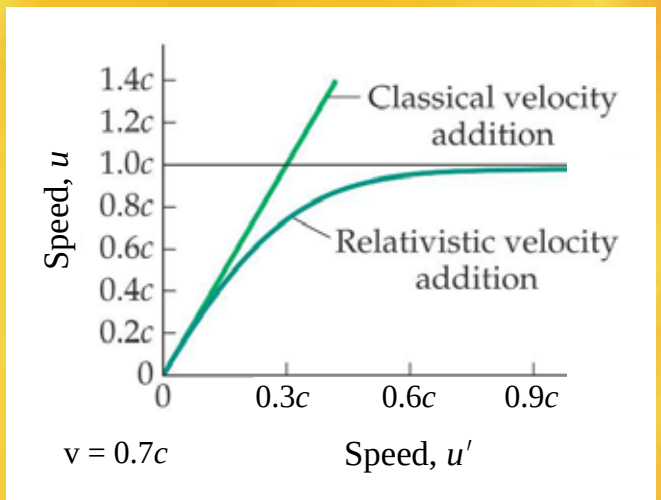
إذا عرفنا سرعة المركبة الفضائية في الإطار المرجعي الساكن ، فإنه يمكن حساب سرعة المركبة بالنسبة للمحطة الفضائية:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt} = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt} = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}$$

Relativistic velocity addition plot



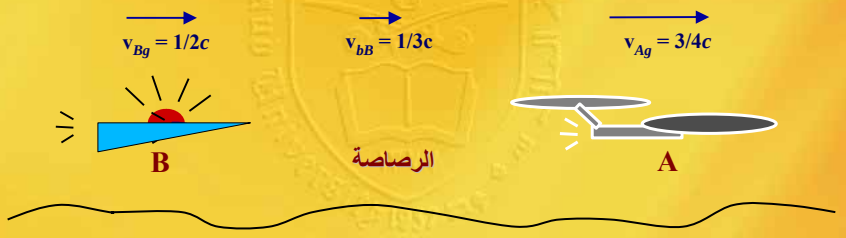
Example: Lorentz velocity transformation

تسير مركبة A بسرعة 0.75c وتلحق بها مركبة B بسرعة 0.5c وتطلق رصاص بسرعة 1/3c بالنسبة للمسدس .

كيف تصل الرصاصة إلي المركبة A حسب:

(a) تحويلات جاليلو

(b) تحويلات لورنتز



v_{Bg} = سرعة B بالنسبة إلى الأرض

v_{bB} = سرعة الرصاصة بالنسبة إلى B

v_{Ag} = سرعة A بالنسبة إلى الأرض

حسب تحويلات جاليلو

$$v_{bg} = v_{bB} + v_{Bg} \rightarrow v_{bg} = \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}c = \frac{5}{6}c$$

Therefore, $\frac{5}{6}c > \frac{3}{4}c$ → justice is served!

حسب تحويلات لورنتز

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \qquad v_{bg} = \frac{v_{bB} + v_{Bg}}{1 + v_{bB} v_{pg}/c^2}$$

$$\Rightarrow \quad v_{bg} = \frac{\frac{1}{3}c + \frac{1}{2}c}{1 + \left(\frac{1}{3}c\right)\left(\frac{1}{2}c\right)/c^2} = \frac{5}{7}c$$

$\frac{5}{7}c < \frac{3}{4}c \quad \rightarrow$ justice is not served!

Example: Addition of velocities

We can use the addition formulas even when one of the velocities involved is that of light.

At CERN, neutral pions (π^0), traveling at 99.975% c, decay, emitting γ rays in opposite directions. Since γ rays are light, they travel at the speed of light in the pion rest frame. What will the velocities of the γ rays be in our rest frame? (Simply adding speeds yields 0 and $2c$!)

Parallel velocities:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} = \frac{c + v}{1 + cv/c^2} = \frac{c + v}{1 + v/c} = \frac{c + v}{(1/c)(c + v)} = c$$

Anti-parallel velocities:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} = \frac{c - v}{1 - cv/c^2} = \frac{c - v}{1 - v/c} = \frac{c - v}{(1/c)(c - v)} = c$$

مثال :

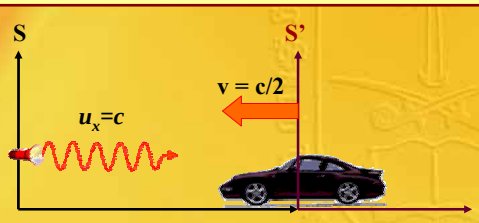
تتحرك سيارة مسرعة بسرعة c/2 بالنسبة لرجل يحمل مصباحاً.

أثبت أن سرعة الضوء المقاسة بواسطة رجل آخر يجلس في السيارة (معه مسطرة مترية وساعة) هي c أي كان اتجاه السيارة .

الحل :

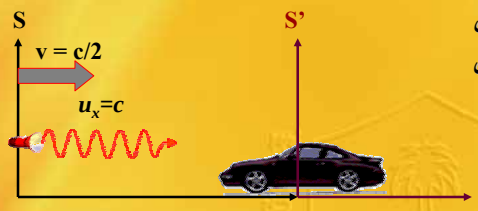
(أ) حالة اقتراب السيارة المصباح

نفترض أن السيارة ساكنة في نظام S' الذي يتحرك تجاه المصباح في نظام S بسرعة c=-c/2 كما هو مبين بالشكل .



$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\left(\frac{v}{c^2}\right)u_x} = \frac{c-(-\frac{c}{2})}{1-\left(\frac{c}{2c^2}\right)c} = c$$

وبهذا يكون الراصد الساكن في S' يقيس سرعة الضوء كما يجب أن تكون ويوضح الشكل التالي الحالة كما يلاحظها الراصد في S'

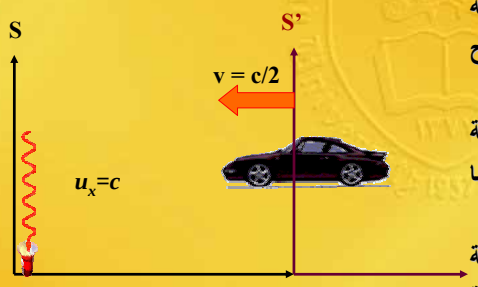


(ب) الحالة التي تكون فيها السيارة في اتجاه y الموجب:

السيارة في حالة سكون في S' ولكن عند نقطة على محور y الموجب يتحرك S' تجاه المصباح (الساكن في S) بسرعة v=-c/2 .

المطلوب الآن حساب قيمة سرعة النبضة الضوئية التي يقيسها راصد في السيارة التي تظهر وكأنها تتحرك في اتجاه y الموجب .

ويوضح الشكل التالي حركة السيارة والنبضة الضوئية كما يلاحظها S ، تتحرك النبضة الضوئية بسرعة c في اتجاه +y أي أن u_y=0 و u_x=0

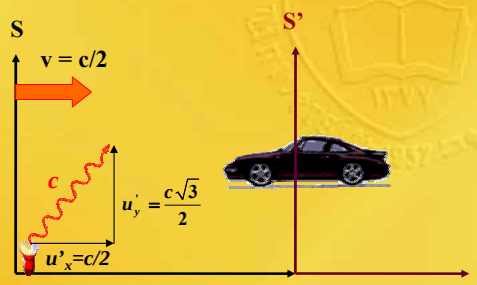


باستخدام تحويلات لورنتز

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-(v/c^2)u_x} = \frac{c}{2}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left[1-(v/c^2)u_x\right]} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

وبالتالي فإن الراصد في S' يرى النبضة الضوئية متحركة تجاه بزاوية θ' بالنسبة لمحور +x' حيث :



$$\tan\theta' = \frac{u'_y}{u'_x} = \sqrt{3}$$

$$\theta' = 60°$$

ولحساب السرعة المقاسة بواسطة S' نحسب محصلة السرعة v' :

$$v' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z} = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{3c^2}{4}} = c$$

ويستنتج من ذلك أنه مهما تغير إتجاه إنتشار الضوء ومهما كانت سرعة الراصد بالنسبة للمصدر الضوئي فإن سرعة الضوء تظل ثابتة