بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار الفصلي الثاني في المقرر ٣٤٣ ريض
الفصل الدراسي الأول ١٤٢٩/١٤٣٠ هـ
الزمن : ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) عرف كلاً من الرمزين كمجموعة : $Aut(G)$, $\mathcal{I}(G)$.

(ب) إذا كانت G زمرة إبدالية وفيها عنصر x ليس نظيراً لنفسه وعرفنا التطبيق $T : G \to G$ كما يلي : $g\,T = g^{-1}$ **فأثبت أن :**

١) $T \in Aut(G)$.

٢) $|Aut(G)| > 1$.

السؤال الثاني :

لتكن $G\,|_S$ **وَ** $K \leq G$ **، حيث :**

$S = \{1, 2, 3, 4\}$,

$G = A_4 = \{(1), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), \ldots\}$

و K مكونة من العناصر الأربعة الأولى في G .

أجب عما يأتي :-

(أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :

١) **يوجد** $\sigma \in G$ و $\tau \in K$ بحيث $\sigma^{-1}\,\tau\,\sigma \notin K$.

٢) **إذا كان** $\varphi \in K$ **فإن** $N(\varphi) = K$ (ممركز φ في K أو منظم φ) .

٣) **إذا كانت** $\mu = (1,2,3)$ **فيوجد** $\alpha \in G$ **بحيث :** $\alpha^{-1}\,\mu\,\alpha = (1,3,2)$.

(ب) أكمل عناصر G .

(ج) املأ الفراغات فيما يأتي :

1) 4 مدار $= 4G = \{\ldots | \ldots\} = \{\ldots\} \Rightarrow |4G| = \cdots$

2) $G_4 = \{\ldots | \ldots\} = \{\ldots\} \Rightarrow |G_4| = \cdots$

3) $\sigma = (1,2,3) \in G \Rightarrow S_\sigma = \{\ldots | \ldots\} = \{\ldots\} \Rightarrow |S_\sigma| = \cdots$

4) $x = 4 \Rightarrow [G : G_4] = \cdots$

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابة أسئلة الاختبار الفصلي الثاني في المقرر ٣٤٣ ريض – الفصل الأول ٢٩ / ١٤٣٠ هـ

إجابة السؤال الأول :

(أ) : $Aut\,(G) = \left\{T : G \xrightarrow{T} G \wedge \text{تشاكل } T\right\}\ ,\mathcal{I}(G) = \left\{T_g \in Aut(G) : g \in G\right\}$

(ب) :

١) إن $T \in Aut(G)$ ، لأن :

$$y \in G \Rightarrow \exists\, x = y^{-1} \in G \ni x\,T = x^{-1} = \left(y^{-1}\right)^{-1} = y$$

إذن T غامر

$$x\,, y \in G \ni x\,T = y\,T \Rightarrow x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y$$

إذن T متباين

لأن G إبدالية — $\forall\, x\,, y \in G : x\,y\,T = (xy)^{-1} = y^{-1}\,x^{-1} = x^{-1}\,y^{-1} = x\,T\,y\,T$

إذن T تشاكل .

مما سبق نجد أن $T \in Aut(G)$.

٢) بما أنه يوجد $x \in G$ بحيث $x^{-1} \neq$ x فإن :

$$x\,T = x^{-1} \neq x = x\,I \Rightarrow T \neq I \Rightarrow |Aut(G)| > 1$$

إجابة السؤال الثاني :

لتكن G تؤثر على S و $K \leq G$ ، حيث $G = \mathbb{A}_4$ و$S = \{1,2,3,4\}$ و عناصر K هي (1) و (1,2)(3,4) ومرافقاتها .

(أ) :

١) عبارة خاطئة ، لأن ، $K \lhd G$ ولذا فإن $\sigma^{-1}\tau\,\sigma \in K$ لكل $\sigma \in G$ و $\tau \in K$.

٢) عبارة صائبة ، لأن K زمرة إبدالية ، لذا فإن $N_K(\varphi) = K$ لكل $\varphi \in K$.

٣) عبارة خاطئة ' لأن $\propto^{-1}(1,2,3) \propto = (1,3,2)$ لا يتحقق إلا إذا كان التفريق الدوري للعنصر $\propto$ هو $\{1,1,2\}$ وهذا يعني أن $\propto \notin G$.

(ب) : (2,3,4) , (2,4,3) , (1,4,3) .

(ج) :

1) $\text{مدار } 4 = 4G = \{4\sigma | \sigma \in G\} = \{1,2,3,4\} \Rightarrow |4G| = 4$

2) $G_4 = \{\sigma \in G | 4\sigma = 4\} = \{(1),(1,2,3),(1,3,2)\} \Rightarrow |G_4| = 3$

3) $\sigma = (1,2,3) \in G \Rightarrow S_\sigma = \{x \in S | x\,\sigma = x\} = \{2\} \Rightarrow |S_\sigma| = 1$

4) $x = 4 \Rightarrow [G : G_4] = \frac{12}{3} = 4$
