

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جامعة الملك سعود
قسم الرياضيات
الاختبار الفصلي الثاني في المقرر ٣٤٣ رياضيات
الفصل الثاني (٤٤٧/٤٤٨) الزمن: ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة الآتية

س٦: (أ) متى نقول إن $\phi \in \text{Aut}(G)$ ؟
(ب) إذا كان $\phi \in \text{Aut}(G)$ وكان $\phi(x) = x^{-1}$ حيث $|x| = n$
فأثبت أن $|\phi(x)| = n$ أيضا.

س٧: (أ) متى نقول عن G بأنها زمرة تبديلات ؟
(ب) إذا كان التفريم الدوري لتبديلات σ هو $\{1, 3, 4, 5\}$
فأجب عما يأتي :
I) أصل الفراغات الآتية :

(١) $\sigma \in \langle \sigma \rangle$ (٢) $|\langle \sigma^3 \rangle| = \dots$

(٣) $|N(\sigma)| = \dots$ (٤) $C_\sigma = \dots$ (عدد تبديلات σ)
II) هل σ^2 تبديلية زوجية ؟ وماذا ؟

س٨: (أ) أكتب نص « مبرهنة كوشي »
(ب) إذا كانت G زمرة رتبة 441 فأثبت أنها تملك زمرة
جزئية H و K مثلًا، بحيث :
 $|H| = 3$ و $|K| = 7$ و $|HK| = 21$



لا يكتب في
هذا الهامش

السوق العراقية

(P) $\text{Aut}(G) = \{ T \mid G \xrightarrow{T} G \}$

(Q) $\mathcal{L}(G) = \{ T_g \in \text{Aut}(G) \mid g \in G \} \subseteq \text{Aut}(G) \subseteq \text{AG}(G)$

(R) $|\text{Aut}(G)| = 2$

(S) $|\mathcal{L}(G)| = \frac{|G|}{|Z(G)|} = \frac{14}{2} = 7$

(T) $\sigma \in S_n$ where $\sigma \neq \{2, 2, 2, 3, 5\}$

(U) $n = \sum_{i=1}^k l_i = 2 + 2 + 2 + 3 + 5$

(i) $n = 14$

(ii) $|S^3| = 10$

(iii) $|N(\sigma^5)| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot |S_3| \cdot 3 \cdot |S_{14-9}|$

$= (2)(2)(2)(3!) \cdot (3) \cdot (5!)$

$= (24)(3!)(5!)$

$= (24)(6)(120)$

$= 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5$

النتيجة

$3! = 6$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$



لا يكتب في هذا الهامش

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 13\} \quad G \mid S \quad \textcircled{a}$$

$$G = \langle g \mid g = (2, 6, 4)(3, 7, 5, 13) \rangle \quad \textcircled{b}$$

~~① $5G = \{5g \mid 5g = 5\} \forall g \in G$~~

~~② $5G = \{3, 5\}$~~

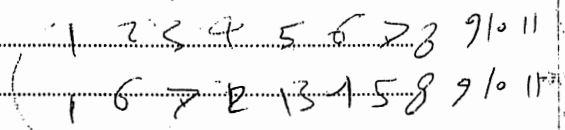


① $5G = \{3, 7, 5, 13\} \leftrightarrow \{5, 7\}$

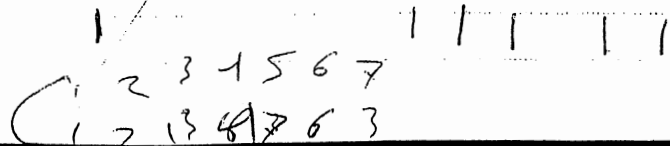
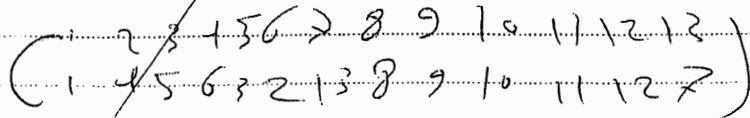
② $G = \{3, 7, 5, 13\} \quad G_g = \{g \in G \mid xg = x\}$
 $g = 6$

$G_g = \{1, 6\}$

③ $|S_{g^3}| = 9$



$g = (2, 5, 4)(3, 4, 6, 13, 7, 2, 13, 1, 5, 8, 9, 10, 11, 2, 3)$
 $13 - 4 = 9$





لا يكتب بي
هذا الهامش

السؤال الثاني

③ لخص من هذه الوثيقة

① دراجات الحافلات هي زعمرة منتظمة وكان P (حيث g عدد أولي)

فإنها تتلصق عضوياً لمنتج P وبالتالي فإنها تتلصق زعمرة

حزبية لمنتج P ✓

④ تكون ابدئية إذا كانت P / g صفر

④

لا يوجد قرار

⑤ تكون ابدئية ← في ابدئية ← $g = Z(g)$ صفر

لا يوجد قرار



لا يكتب في هذا المكان

التمرين 2
 ما هي $|G|$ حيث $2 \mid |G|$ و $|G| = 6 = 2 \cdot 3$
 حيث $2 \mid |G|$ حيث 2 عدد أولي

فإنه من مبرهنات سيل: يوجد زمرة جزئية طبيعية بحجمتها 2
 ولكن N هي $|N| = 2$

ومن أمثلة مبرهنات سيل أنه يوجد تشاكل $A(S) \rightarrow \varphi: G \rightarrow K$ ذاتية K
 هي أكبر زمرة جزئية طبيعية في G وعنوانها H

التمرين 2 مبرهنات سيل $N = \langle a \mid a^2 = e \rangle = \{e, a\} < G$

$$N < G \Rightarrow \exists S \in \{H \mid H < G\} \Rightarrow |S| = [G : N] = \frac{|G|}{|N|} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \exists A(S) \Rightarrow |A(S)| = [G : N] = 3 \Rightarrow 6$$

من أمثلة مبرهنات سيل أنه يوجد تشاكل $A(S) \rightarrow \varphi: G \rightarrow K$ ذاتية K
 أكبر زمرة جزئية طبيعية في G وعنوانها N
 ومن المبرهنات الأساسية الأولى أنه يمكن اختزال G/N

$$G/K \cong \varphi(G) \leq A(S)$$

$$K \subseteq N \Rightarrow K = \begin{cases} \{e\} & \text{(i)} \\ N & \text{(ii)} \end{cases}$$

البيان (i) عندما $K = \{e\}$ فإن

$$G/K = G/\{e\} \cong G \cong \varphi(G) \leq A(S) \cong S_3$$

وحيث $G \cong \varphi(G)$ وبالتالي $6 = |G| = |\varphi(G)|$

وعلى $|A(S)| = 6$ وبالتالي

$$G \cong \varphi(G) = A(S) \cong S_3$$

$$\Leftrightarrow G \cong S_3$$



وهذا الحالة (1) $K = N \triangleleft G$ فإن

$$K = N \triangleleft G \Rightarrow \forall g \in G : g a g^{-1} = \begin{cases} e & \text{--- (1)} \\ a & \text{--- (2)} \end{cases}$$

المرتب \triangleleft

وتفوق الحالة (1)

$$e = g a g^{-1} \Rightarrow e g = (g a g^{-1}) g$$

$$\Rightarrow e g = g a (g^{-1} g)$$

$$\Rightarrow e g = g a e$$

$$\Rightarrow e g = g a$$

$$\Rightarrow g^{-1} (g) = g^{-1} (g a)$$

$$\Rightarrow g^{-1} g = (g^{-1} g) a$$

$$\Rightarrow e = e a$$

$$\Rightarrow e = a$$

وهذا تناقض مع كون $e \neq a$

$$K = N \triangleleft G \Leftrightarrow \forall g \in G : g a g^{-1} = a$$

كما سبق نجد ان

ان

$$K = N \subseteq Z(G)$$

لذا فإن ان $b \in G$ و $b \notin N$ وان b من $N(b)$

$$N(b) = \{ x \in G \mid x b = b x \} \triangleleft G$$

$$K = N \subseteq N(b)$$

$$Z(G) \cap N(b)$$

$$N(b) \subseteq Z(G)$$

$$b \notin N \quad \text{و} \quad b \in Z(G)$$

$$\Rightarrow |N(b)| > 2 = |K| = |N|$$

$$N(b) \not\subseteq Z(G)$$

$$b \notin N \quad \text{و} \quad b \in G$$

وبالتالي فإن

$$|N(b)| > |Z(G)|$$

$$\Rightarrow |N(b)| > 2 = |K| = |N|$$

$$\Rightarrow K = N < N(b) \triangleleft G$$

$$\Rightarrow |K| = |N| = 2 \mid |N(b)| \quad \wedge \quad |N(b)| \mid |G| = 6$$

ملاحظة
فيكون
المرتب \triangleleft



لا يكتب في
هذا الهامش

$$\Rightarrow |N(b)| = 6$$

لأنه العدد الأولي الذي يقبل القسمة على 2
وهو أكبر من 2. ونظراً لـ $|N(b)| = 6$
ولقسمة 6

$$\Rightarrow G \subseteq N(b) \wedge N(b) \subseteq G$$

$$\Rightarrow N(b) = G$$

\Rightarrow كما بدلية

وهذا ما يقص

والتالي فإن

$$\{e\} + N \triangleleft G$$

$$N \triangleleft G \text{ و } N \subseteq H$$



$$|G| = 289$$

تكون ايساوية اذا كانت p^n

$$g^2 = (2, 6) \quad g^1 = (2, 6, 4) (3, 7, 5, 13)$$

$$g^2 = (2, 4, 6) (3, 5, 7, 13)$$

$$g^1 \cdot g^2 = (2) (6) (4) (3, 13) (5, 7)$$

$$g^3 = (3, 13, 5, 7) (1) (2) (4) (6) (8) (9) (10) (11) (12)$$

$$\sum_{g^3} = \{s \in S \mid \#g^3 = 8\}$$

$$1, 2, 8, 4,$$

$$\sigma = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12)(13, 14)$$



لا يكتب في
هذا الهامش

$$|N(\sigma^5)|$$

$$C_a = \frac{1}{a!}$$

$$\sigma^3 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7)(8)(9)(10, 13, 11, 14, 12)$$

$$\sigma^4 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7, 8, 9)(10, 14, 13, 12, 11)$$

$$\sigma^4 = \cancel{(1)(2)(3)}(7, 8, 9)(10, 14, 13, 12, 11)$$

$$\sigma^5 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 9, 8)(10)(11)(13)(14)(12)$$

$$\sigma^3 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 9, 8)$$

$$\begin{aligned} |N(\sigma^5)| &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot |S_3| \cdot 3 \cdot |S_1| \cdot |S_{1/4-1}| \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 3 \cdot 4! \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 24 \\ &= (24)(24)(6) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4 \times 3 \times 2 \\ 12 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 24 \\ 24 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$(1, 1, 1, 1, 1) \quad \sigma = 1$$



لا يكتب في
هذا الباندر

$$\sigma = 1$$

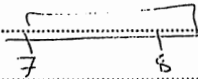
$$\sigma = \{2, 2, 2, 3, 5\} \in S_{14}^*$$

$$\therefore \sigma^3 = \sigma \sigma \sigma$$

$$1, 2, 3, 4, \dots, 14$$

$$\sigma = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14) \in S_{14}$$

$$\sigma^2 = (1, 2)(3, 4)$$



$$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7, 9)(8, 7)(10, 12, 14, 11, 13)$$

$$\sigma^2 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7, 8, 9)(10, 12, 14, 11, 13)$$

$$\therefore \sigma^2 = (7, 8, 9)(10, 12, 14, 11, 13)$$

$$\sigma^3 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 9)(8, 7)(10, 13, 11, 14, 12)$$

$$\sigma^3 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8, 9)$$

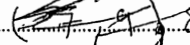


$$\sigma^2 = (7, 9)(8, 7)(10, 12, 14, 11, 13)$$

$$(7, 8, 9)(8, 7, 9)$$

$$\sigma^1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14)$$

$$\sigma^3 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8, 9)$$



$$(7)(8)(9)(10, 13, 11, 14, 12)$$

$$\sigma^3 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(10, 13, 11, 14, 12)$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 3 & \rightarrow & 10 \end{matrix}$$

$$[1] = (1, 2) \leftrightarrow l_1 = 2$$

$$[3] \quad l_2 = 2$$

$$[5] \quad l_3 = 2$$

$$[10] \quad l_4 = 5$$

$$[7] \quad l_5 = 1$$

$$[8] \quad l_6 = 1$$

$$[9] \quad l_7 = 1$$

$$10^3 = 2 \cdot \text{ord}(\sigma^3)$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 جامعة الملك سعود
 قسم الرياضيات
 الفصل الأول ١٤٤٧م / ١٤٤٨هـ
 الزمن: ساعة ونصف
 الاختبار الفصلي الثاني في المقرر ٣٤٣ ريف

أجب عن الأسئلة الآتية

٧
 س١: (١) متى نقول إن G/H هي (G/H) (تسمى على H)
 (ب) إذا كانت G زمرة H فماذا كانت $S = \{A \mid A \subseteq G\}$ فأثبت أن:

(أ) إذا كانت G/H زمرة H وكان $a \in X$ و $g, h \in G$ فأثبت أن

$$S_6 \circ (3, 4, 5) \quad a \cdot g = a \cdot h \implies g = h$$

٧
 س٢: أثبت صحة أو خطأ كل مما يأتي :-
 (أ) إذا كانت G زمرة غير إبدالية فإن $|Aut(G)|$ طاقية

(ب) إذا كان $T: G \rightarrow G$ تطبيقاً حيث $T_g = g \times g^{-1}$ و $g \in G$ فإن:

$$T_{gh} = T_g T_h \quad \text{حيث } g, h \in G$$

٧
 س٣: إذا كان التفرع الدوري للتبدلات σ هو $\{2, 3, 6\}$ فما كل الفراغات الآتية لتفصيل على عبارات صائبة :-

(١) $n = 15$ حيث $\sigma \in S_n$

(٢) $|N(\sigma)| = 36$

(٣) $|N(\sigma)| = 24$

(٤) لا شيء $\sigma \in S_n$ فإن $\sigma \in A_n$ لأن $\sigma^{-1} \sigma = \dots$

- (1) (2) (3) (4) (5, 6) (7, 8, 9) (10, 11, 12, 13, 14, 15)

S_{n-1}
 $(1, 1, 1, 1, 1) S_4$
 $(5) (6) (7, 8)$

$2: |S_1| \quad 3: |S_1| \quad 6: |S_1|$

$2, 3, 6$
 $36, 24$

المختار الفصل الثاني في المقرر ٢٠٢٣ ريف
الفصل الثاني ١٤٥٧/١٤٥٨ هـ الزمن : ساعة ونصف

جامعة الملك سعود
قسم الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية

٧ - أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يلي :

(أ) إذا كانت G زمرة أبدالية رتبة n فإن $C_x = 1$ لكل $x \in G$ ، $\forall x$

(ب) إذا كانت $S_4 \cong S_3 \times S_2$ ، فإن $C_x = 3$ ، $\forall x \in S_4$ ، $\forall x$ خارج

(ج) إذا كانت G تؤثر على S_n ، وكان $(a, g) = (a, h)$ ، حيث $a \in G$ ، $g, h \in S_n$ ، فإن $g = h$ ، $\forall g, h$ خارج

$|N(G)| = 2 \cdot 2 \cdot 2$
 $= 4$

٧ - (أ) عرف الزمرة الأولية .
(ب) إذا كانت G زمرة أولية و K مجموعة منتهية
فأثبت أن :

$$|S| \equiv |S_G| \pmod{p}$$

٧ - أجب عن الأسئلة فيما يأتي :-

(أ) إذا كانت G زمرة دائرية رتبة 15 ، فإن :

$|Aut(G)| = \dots$ ، $U_{15} = \{ \dots \}$ ، وبالتالي فإن $Aut(G) \cong \dots$

(ب) إذا كانت G زمرة غير منتهية ، فإن $Z(G) \cong \dots$

(ج) إذا كانت G زمرة رتبة قوة لعدد أولي ، فإن $Z(G) \neq \dots$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جامعة الملك سعود قسم الرياضيات
الرياض، الفصل الأول ١٤٤٦ - ١٤٤٧ هـ الزمن: ساعة

أجب عن الأسئلة الآتية

- س١: برهن صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:
- (أ) إذا كانت G زمرة رتبته 529 فإنها إبدالية.
- (ب) " " " " G " " إبدالية فإنه $|Aut(G)|$
- (ج) إذا كان (G, I) حيث $I, J, h \in G$ فإن $I \cap J = I \cap h$
- (د) إن $\sigma \in A_9$ حيث $\sigma = (3, 4, 5, 7)$ و $\sigma \in S_9$.

- س٢: (أ) عرّف الرمز $Z(G)$ لمجموعة G .
- (ب) أثبت أن:

$$G/Z(G) \cong Z(G)$$

- س٣: (أ) من نقول بأنه G تؤثر على مجموعة S .
- (ب) إذا كانت G تؤثر على S وكان $a \in S$ فعرفنا G_a وصرنا برهنه أن $G_a \cong G$.

(P) تكون A/G إذا وجد تطبيق $\lambda: G \rightarrow A$ * تحقق

$$(i) \lambda e = x \quad \forall x \in A \text{ و } e \in G$$

$$(ii) \lambda(g_1 g_2) = (\lambda g_1) g_2 \quad \forall g_1, g_2 \in G \text{ و } x \in A$$

$$G_a = \{g \in G \mid ag = a\} \quad (ii)$$

أهم الأسئلة التمهيدية

- ١- أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:
- (أ) إذا كانت $H, K \leq G$ فإن $H \cap K \leq G$. **صائب**
- (ب) إذا كانت $A, B \leq G$ حيث $|G| < 100$ و $|A| = 25$ و $|B| = 10$ فإن $|G| = 50$. **صائب**
- (ج) إن \sum_p^* زمرة غير بسيطة حيث $p > 2$ (معد أولي) .

- ٢- إذا كان $\phi: G = GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ تطبيقاً حيث $\phi(A) = \det A$ فأجب عما يأتي:
- (أ) أثبت أن ϕ تماثل غامر
- (ب) $K_\phi = \{ A \in G \mid \phi(A) = e \}$ **صائب**
- (ج) $K_\phi = \{ A \in G \mid \det A = 1 \}$ **صائب**
- (د) $G/K_\phi \cong \mathbb{R}^*$ **صائب**

- ٣- إذا كان $\phi: G \rightarrow \bar{G}$ تماثلاً غامراً وكانت $\bar{N} \triangleq \bar{G}$ و $N = \phi^{-1}(\bar{N})$ وعرفنا تماثلاً غامراً $\psi: G \rightarrow \bar{G}/\bar{N}$ كما يلي:
- $\psi(g) = \bar{g} = \bar{N} \phi(g)$

فأجب عما يأتي:

(أ) $G/K_\psi \cong \frac{G/K_\phi}{\bar{N}}$ **صائب**

(ب) أثبت أن $K_\psi = N$



$K_\psi = \{ x \in G \mid \psi(x) = \bar{N} \}$ تعريف K_ψ

$= \{ x \in G \mid \bar{N} \phi(x) = \bar{N} \}$ تعريف ψ

$= \{ x \in G \mid \phi(x) \in \bar{N} \}$ **صائب**

$= \{ x \in G \mid \phi(x) \in N \}$