جامعة الملك سعود / كلية العلوم	بسـم الله الرحمن الرحيم	الفصل الثاني ١٤٢٩ / ١٤٣٠ هـ
قســـم الرياضيات	الاختبار الفصلي الأول في المقرر٣٤٣ ريض	الزمن : ساعة و نصف

السؤال الأول : (6 درجات)

إذا كانت $G = U_{21}$ و $H =< 2 > \leq G$ فأكمل الفراغات الآتية :-

(١) $G = \{.....\}$

(٢) $H = \{.....\}$

(٣) $G/H = U_{21}/< 2 >= \{.....\}$

(٤) $|G/H| = ...$

(٥) $4,8 \in G \Rightarrow < 4 >= \{.....\}, < 8 >= \{.....\}$

(٦) يوجد تشاكل طبيعي ψ من ..... إلى $G/< 2 >$.

السؤال الثاني : (14 درجة)

أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:-

(أ) إن $< 4 > \cup < 8 > \leq U_{21}$.

(ب) إن $< 4 > < 8 > \leq U_{21}$.

(ج) إذا كان $a \in G$ بحيث $|a| > 2$ فإن $a \neq a^{-1}$.

(د) إذا كانت $G = S_3$ و $H =< \phi > \leq G$ فإن $H \trianglelefteq G$.

(هـ) إذا كان $\psi : G \to G^*$ تشاكلا نواته K فإن $G/K \cong G^*$.

(و) إذا كانت $N \trianglelefteq G$ و $x, y \in G$ بحيث $xy^{-1} \in N$ فإن : $Nx = Ny$.

(ز) إذا كانت $G = GL(2, \mathbb{Z}_3)$ و $H \leq G$ حيث : $H =< A, B : A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} >$

فإن H زمرة زوجية رتبتها 6.

جامعة الملك سعود / كلية العلوم	بسـم الله الرحمن الرحيم	الفصل الثاني ١٤٢٩ / ١٤٣٠ هـ
قســـم الرياضيات	الاختبار الفصلي الأول في المقرر ٣٤٣ ريض (نموذج الإجابة)	الزمن : ساعة و نصف

السؤال الأول : (٦ درجات)

إذا كانت $G = U_{21}$ و $H =< 2 > \leq G$ فأكمل الفراغات الآتية :-

(١) $G = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}$

(٢) $H = \{1, 2, 4, 8, 11, 16\}$

(٣) $G / H = U_{21} / < 2 >= \{< 2 >, < 2 > 5\}$

(٤) $|G / H| = 2$

(٥) $4, 8 \in G \Rightarrow < 4 >= \{1, 4, 16\}, < 8 >= \{1, 8\}$

(٦) يوجد تشاكل طبيعي ψ من $G = U_{21}$ إلى $G / < 2 >$.

السؤال الثاني : (١٤ درجة)

أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:-

(أ) إن $< 4 > \cup < 8 > \leq U_{21}$ عبارة خاطئة ، لأن $4 \cdot 8 = 32 = 11 \notin < 4 > \cup < 8 >$

(ب) إن $< 4 > < 8 > \leq U_{21}$ عبارة صائبة (مبرهنة) ، لأن U_{21} زمرة إبدالية.

(ج) عبارة صائبة ، لأنه بفرض أن $a = a^{-1}$ جدلا يكون لدينا :

$a^{-1} = a \Rightarrow a\, a^{-1} = a^2 = e \Rightarrow |a| \leq 2 \Rightarrow$ تناقض مع المعطيات

(د) عبارة خاطئة ، لأن $\phi\psi \neq \psi\phi$ حيث $\psi \in G$.

(هـ) عبارة خاطئة ، لأن ψ قد لا يكون تطبيقا غامراً وبالتالي فإن : $G / K \cong \psi(G) < G^*$.

(و) عبارة صائبة ، لأن : $x y^{-1} \in N \Rightarrow x y^{-1} = n \in N \Rightarrow x = n y \in N y \Rightarrow N x = N y$.

(ز) عبارة خاطئة ، لأن:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq I_2$$

لذا فإن $|H| > 6 = |D_3|$.