بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار الفصلي الأول في المقرر ٣٤٣ ريض
الفصل الدراسي الأول ١٤٣٠/١٤٢٩ هـ
الزمن : ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) متى نقول إن $H \trianglelefteq G$ ؟

(ب) إذا كانت $A, B \trianglelefteq G$ فأثبت أن $AB \trianglelefteq G$ إذا علمت أن : $AB \leq G$

السؤال الثاني :

لتكن $G = GL(2,\mathbb{Z}_p)$ وليكن $\varphi : G \to \mathbb{Z}_p^*$ تطبيقاً ، حيث $\varphi(A) = det\, A = |A|$

أجب عما يلي :

(أ) أثبت أن φ تشاكل .

(ب) أكمل الفراغات الآتية :

1) $\mathbb{Z}_p^* = \cdots$

2) $(G,\cdot) = (\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \dots\dots\dots$

3) φ نواة $= K_\varphi = \{\dots\dots\dots\dots\dots\}$

(ج) بفرض أن $P = 3$ و $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in G$ املأ الفراغات :

١) $\mathbb{Z}_3 = \cdots$

٢) $|(M)| = \cdots$

السؤال الثالث :

أثبت صحة أو خطأ كل مما يلي :

(أ) يوجد عنصران مختلفان في G كل منهما نظير نفسه ، حيث $|G| > 1$.

(ب) توجد زمرة G و $H, K \leq G$ بحيث :

$|G| = 24$ و $|H| = 6$ و $|K| = 8$ و $|H \cap K| = 3$

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابة أسئلة الاختبار الفصلي الأول في المقرر ٣٤٣ ريض – الفصل الأول ٢٩ / ١٤٣٠ هـ

إجابة السؤال الأول :

(أ) : نقول إن $H \trianglelefteq G$ إذا كانت $H \leq G$ تحقق الشرط :

$$g^{-1}h\,g \in H ,\forall\, g \in G \wedge h \in H$$

(ب) : لنبرهن أن :

$$A, B \trianglelefteq G \;\wedge\; AB \leq G \Rightarrow AB \trianglelefteq G$$

كما يلي :

$\forall\, g \in G \wedge ab \in AB : \; g^{-1}abg = g^{-1}aebg$ **(خاصة e)**

$= g^{-1}agg^{-1}bg$ (لأن $e = gg^{-1}$)

$= (g^{-1}ag)(g^{-1}bg)$ (خاصة التجميع)

ولما كانت كل من A و B ناظمية قي G فإن $g^{-1}ag \in A$ و $g^{-1}bg \in B$

ومنه نستنتج أن $(g^{-1}ag)(g^{-1}bg) \in AB$.

لذا فإن $AB \trianglelefteq G$.

إجابة السؤال الثاني :

ليكن $\varphi : \left(G = GL(2, \mathbb{Z}_p)\right) \to \mathbb{Z}_p^{*}$ تطبيقاً ، حيث $\varphi(A) = det\ A$.

(أ) : φ تشاكل ، لأنه

$\forall\, A, B \in G : \; \varphi\,(AB) = det\, AB$

$= det\, A \;\, det\, B$ —(مبرهنة)

$= \varphi(A)\, \varphi(B)$

(ب) :

4) $\mathbb{Z}_p^{*} = \{1, 2, 3, \dots, P-1\}$

5) $(G, \cdot) = \left(\left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p \wedge det\ A \neq 0\right\}, \; \cdot\right)$

6) φ نواة $= K_\varphi = \left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G : \; \varphi(A) = det\ A = 1\right\}$

(ج) :

١) $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

٢) $|\langle \mathrm{M} \rangle| = 2$

إجابة السؤال الثالث :

(أ) : عبارة خاطئة ، فمثلاً عندما $G = \mathbb{Z}_5$ فلا يوجد فيها أي عنصرين مختلفين بحيث يكون كل منهما نظير نفسه .

(ب) : عبارة خاطئة ، لأن $H \cap K \leq K$ لذا فيجب أن يكون $|H \cap K| \,\big|\, |K|$ ولكن $|K| = 8$ و $|H \cap K| = 3 \nmid$.
