

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 جامعة الملك سعود
 قسم الرياضيات
 الاختبار الفصلي الأول في المقرر ٣٤٣ ريفي
 الفصل الأول ١٤٤٦-١٤٤٧ هـ الزمن: ساعة

أجب عن الأسئلة التالية

س١: أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:

(١) إذا كان $a \in G$ فإن: $a^{-1} = a$ $\Leftrightarrow |a| = 2$ ~~صحيحة~~ ~~خاطئة~~

(٢) تكون G زمرة دائرية إذا وفقط إذا كانت ترتيباً عددياً. ~~خاطئة~~ ~~صحيحة~~

(٣) إذا كان $x \in G$ حيث $o(x) = 2$ فإن $x^{-1} = x$. ~~خاطئة~~ ~~صحيحة~~

س٢: (١) إذا كانت $N \subseteq G$ فمن نقول إن $N \trianglelefteq G$ ؟

(٢) إذا كانت $H \subseteq G$ و $N \trianglelefteq G$ فأثبت أن:

$$H \cap N \trianglelefteq H$$

مثال
 $G = U_9 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

$\hookrightarrow U_9$ زمرة دورية (كم $|U_9| = 6$)
~~بشكل~~ ~~ترتيباً عددياً~~

$$\psi^3 = \psi \psi^2 = e \Rightarrow \psi^{-1} = \psi^2$$

$$\Rightarrow \psi^{-1} \neq \psi$$

بينة

$$(\psi = (1, 2, 3))$$

$$(\psi^2 = (1, 3, 2))$$

$$|a| = 2$$

$$a^2 = e$$

$$a^2 = aa = e$$

$$(a^{-1} / a) = a^{-1} \Rightarrow a = a^{-1}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جامعة الملك سعود
قسم الرياضيات
الدرجتان الفصلي الأولى في المقرر ٣٤٣/٣٤٤
الفصل الثاني ١٤٣٦/١٤٣٧ هـ الزمن: ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة الآتية

٦- إذا كانت $H \leq G$ و $g \in G$ فأجب عما يأتي :-

(أ) أمكن الفراغ :-
$$gHg^{-1} = \{ ghg^{-1} \mid g \in G \text{ و } h \in H \}$$

(ب) أثبت أن $gHg^{-1} \leq G$

٧- إذا كان $\phi : G \rightarrow \bar{G}$ تماثلاً غامراً نوته K وكان $\bar{g} \in \bar{G}$ فأجب عما يلي :-

(أ) أمكن الفراغ :-
$$\phi^{-1}(\bar{g}) = \{ x \in G \mid \phi(x) = \bar{g} \}$$

(ب) أثبت أن :-

$$\phi(x) = \bar{g} \text{ أثبت } \phi^{-1}(\bar{g}) \subseteq Kx$$

٨- متى نقول عن زمرة G و H أنهما متماثلتان ؟

قوله (٨) H و G متماثلتان إذا وجدت تماثل ϕ ان ϕ (١) تماثل ϕ (٢) تماثل ϕ (٣) تماثل ϕ (٤) تماثل ϕ (٥) تماثل ϕ (٦) تماثل ϕ (٧) تماثل ϕ (٨) تماثل ϕ (٩) تماثل ϕ (١٠) تماثل ϕ

(أ) ليكن $\phi : (\mathbb{R}^+, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, +)$ تطبيقاً بحيث $\phi(a) = \log_{10} a$

أجب عما يأتي :-
(١) أثبت أن $\mathbb{R}^+ \cong \mathbb{R}$

(٢) وظيفت خواص التماثل في إثبات أن :-

$$\log \frac{1}{a} = -\log a$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جامعة الملك سعود
 قسم الرياضيات
 الفصل الأول ١٤٢٨ / ١٤٢٩ هـ الزمن ساعة ونصف
 الاختبار الفصلي الأول في المقرر ٣٤٣ رياض

أجب عن الأسئلة الآتية

هنا n عدد صحيح موجب
 $m = e$ حقه المار

س: (أ) إذا كانت G زمرة وكان $x \in G$. فعرف رتبة x .
 (ب) إذا كانت $G = GL(2, \mathbb{Z}_5)$ وكان $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in G$ فأكل ما يلي:

(1) $|A| = \boxed{2}$

(2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \in G$

س: (أ) إذا كانت $H, K \leq G$ فأثبت أن: $H \cap K \leq H$
 (ب) استقر من الفقرة (أ) في تحديد ما إذا كانت العبارة الآتية صائبة أم خاطئة:
 « توجد $H, K \leq G$ بحيث $|G| = 420$ و $|H| = 20$ و $|K| = 21$ و $|H \cap K| = 2$ »

س: إذا كان $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ تطبيقاً خطياً:
 $\phi(a) = m\mathbb{Z} + a$

فأثبت أن:
 (أ) ϕ تماثل عام
 (ب) $|\phi(\mathbb{Z})| = m$

$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \phi(a) = \phi(b)$
 $y \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \ni \phi(a) = y$
 $\Rightarrow m\mathbb{Z} + a = m\mathbb{Z} + b$
 $\Rightarrow \phi(a) = m\mathbb{Z} + a = y \Rightarrow a = y - m\mathbb{Z}$
 $-m\mathbb{Z} + (m\mathbb{Z} + a) = -m\mathbb{Z} + (m\mathbb{Z} + b)$
 $\Rightarrow \phi(a) = m\mathbb{Z} + a = m\mathbb{Z} + y - m\mathbb{Z} = y$
 إذن عام
 $\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow a = b$
 $\mathbb{Z} = \{m\mathbb{Z} + 0, m\mathbb{Z} + 1, \dots, m\mathbb{Z} + (m-1)\}$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جامعة الملك سعود
قسم الرياضيات
الدراسة الفصل الأول ١٤٢٧/١٤٢٨ هـ الزمن ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة الآتية

س ١ : أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :
(أ) إذا عرفنا زمرة G كما يلي :

$$G = U_n = \{ x \in \mathbb{Z}_n \mid (x, n) = 1, x < n \}$$

فإن U_n زمرة دائرية رتبة $\phi(n)$ ماثلًا

(ب) إذا كانت $N \leq G$ فيوجد تشاكل ϕ من G على G/N .
(ج) إذا كان $G = \langle a \rangle$ تشاكل غير غامر فلا يمكن تطبيق المبرهنات الأولى للتشاكل.

س ٢ : (أ) متى نقول عن زمرة G إننا غير بسيطة ؟
(ب) أثبت أن S_3 زمرة غير بسيطة.

س ٣ : (أ) عرّف الزمرة الزوجية D_n .
(ب) إذا كانت $(D_2, Z_2) = (GL(2, Z_2), G)$ فأثبت أنه

$G = \langle A, B \rangle$ زمرة زوجية، ووجد رتبة G حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 جامعة الملك سعود
 قسم الرياضيات
 الفصل الأول ١٤٤٦ - ١٤٤٧ هـ الزمن : ساعة

أجب عن الأسئلة التالية

س١ : أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :

(١) إذا كان $a \in G$ فإن :

$$|a| = 2 \iff a^{-1} = a$$

(ب) تكون G زمرة دائرية إذا وفقط إذا كانت رتبة G أولية.

(٢) إذا كان $x \in G$ بحيث $x^2 = 1$ فإن $x^{-1} = x$.

س٢ : (١) إذا كانت $N \leq G$ فمنه نقول إن $N \trianglelefteq G$ ؟

(٢) إذا كانت $H \leq G$ و $N \trianglelefteq G$ فأثبت أن :

$$H \cap N \trianglelefteq H$$