جامعة الملك سعود / الرياض — الاختبار النهائي — في المقرر ٣٤٣ ريض

كلية العلوم / قسم الرياضيات — الفصل الدراسي الأول — ١٤٣٢/١٤٣٣ هـ — الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١ : املأ الفراغات في الفقرات الآتية :-

(أ) إذا كانت G زمرة منتهية وغير إبدالية فإن $\{x \in G \mid gx = xg\ \forall g \in G\}$

(i) $Z(G) = \dots$ (ii) $Aut(G) = \dots$ (iii) $I(G) = \dots$

(iv) $G/Z(G) \cong I(G)$

(ب) إذا كان $\sigma = (1,3,5)(2,7)(3,6,9) \in S_9$ فإن : $(1,6,9,3,5)(2,7)$

(i) $|\sigma| = 10$ (ii) $\sigma \notin A_9$ (iii) $|N(\sigma)| = \dots$ (iv) $C_\sigma = \dots$

(جـ) إذا كانت $G = G_1 \times \dots \times G_n$ ، حيث $|G_i| = n_i$ وكانت $g = (g_1, \dots, g_n)$ فإن :

~~(i) $|G| = \dots$ (ii) $|g| = \dots$ (iii) $g^{-1} = \dots$ (iv) $Aut\langle g \rangle \cong \dots$~~

س٢ : أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :- $N(a) = C(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$

(أ) إن مبرهنة كوشي حالة خاصة من مبرهنة سيلو الأولى 68

(ب) إذا كان $x \in Z(G)$ فإن $N(x) = G$ 51

(جـ) إذا كانت $|G| = p^n$ فإن G زمرة غير بسيطة لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ 73

(د) إن $U_4 \times \mathbb{Z}_3 \times H \not\cong \mathbb{Z}_{30}$ ، حيث $H = \langle (1,3,5,2,4) \rangle$

س٣ : (أ) إذا كانت G زمرة منتهية و $H < G$ حيث $|G| \nmid [G:H]!$ فأثبت بالتفصيل أن H تحوي زمرة جزئية ناظمية غير تافهة في G ، ومن ثم تكون G زمرة غير بسيطة. ص 41

(ب) وظف فقرة (أ) في إثبات عدم وجود زمرة بسيطة G رتبتها 12 .

(جـ) أثبت أن الزمر A_4 و D_6 و T مختلفة ، طبقاً للتماثل ، وأن كلاً منها زمرة غير بسيطة ، مستفيداً من الفقرتين (أ) و (ب) ، علماً بأن T معرفة كما يلي :-

$$T = \langle \alpha, \beta : \alpha^4 = \beta^3 = e \wedge \alpha^{-1}\beta\alpha = \beta^{-1} \rangle$$

س٤ : (أ) إذا كانت G زمرة (G تؤثر على S) وكانت $|G| = p^m$ و S منتهية ، فأجب عما يأتي :

(1) أكمل الفراغات الآتية :-

(i) $x_i \in S \Rightarrow$ مدار $x_i = x_i G = \{x_i g \mid g \in G\}$ (ii) $\sum_{i=1}^{r} |x_i G| = \dots$ $|X_i G| = |X|$

(iii) $S_G = \{X \mid XG = G\}$

(2) أثبت أن : $|S| \equiv |S_G| \pmod{m}$ ص 6 — $|X| = |X_i G| \bmod p$

(ب) اكتب نص مبرهنة سيلو الثالثة .

(جـ) استخدم مبرهنات سيلو في إثبات استحالة وجود زمرة بسيطة G رتبتها 70 .